Ce document[1] contient quelques exercices corrigés sur le raisonnement par récurrence. Il peut contenir quelques bugs ... Merci de me les signaler `cuvelier@math.univ-paris13.fr`

1 Raisonnement par récurrence

Exercice 1.1

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Correction Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur n

$$\mathcal{P}(n) : \left(\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \right).$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Itération : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \Big(\sum_{k=0}^{n} k \Big) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \quad \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$

Exercice 1.2

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Version du 23 novembre 2018 à 14:05

Correction Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur n

$$\mathcal{P}(n) : \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right).$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Itération : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \quad \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$

Exercice 1.3

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Correction Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur n

$$\mathcal{P}(n) : \left(\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right).$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Itération : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3, \quad \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇

Exercice 1.4

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Correction Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur n

$$\mathcal{P}(n) : \left(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On a $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$ et $\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Itération : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \Big(\sum_{k=0}^{n} x^k\Big) + x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}, \quad \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇

Exercice 1.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ définie par

$$u_0 = 1,\ u1 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \tag{1}$$

Q. 1 *En calculant les premiers termes, conjecturez une formule pour la suite u_n qui ne soit pas récurrente.*

Q. 2 *Démontrez cette formule par récurrence (forte ?)*

Correction Exercice

Q. 1 On a

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...
1	4	7	10	13	17	...

On a alors

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui donne en formule ne dépendant que de n

$$u_n = 3n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Q. 2 La suite (u_n) est définie par la formule de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Démonstration 1 : par récurrence forte. On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur $n \geqslant 2$ (2 est le premier indice où la formule de récurrence intervient dans le calcul de u_n).

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 3n + 1.$$

On peut aussi noter que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies mais ce n'est pas utile pour la démonstration par récurrence forte que nous allons utiliser.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
On a $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ (par définition) et $u_2 = 2u_1 - u_0 = 7$. Comme $3\times 2+1 = 7$, $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.

Itération : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que, $\forall k \leqslant n$, $\mathcal{P}(k)$ vraie (récurrence forte) et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que si la suite u_n est définie par (1) alors $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$.
Le terme $n+1$ de la suite est défini par

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

Comme $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies (hypothèse de récurrence forte), on a $u_n = 3n + 1$ et $u_{n-1} = 3(n-1) + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - u_{n-1} \\ &= 2(3n+1) - (3(n-1)+1) \\ &= 6n + 2 - 3n + 2 = 3(n+1) + 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence forte* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration 2 : par récurrence *double*. Dans l'équation (1) le calcul de u_n est possible en connaissant u_{n-1} et u_{n-2}. On note $\mathcal{Q}$ la propriété portant sur $n \geqslant 2$

$$\mathcal{Q}(n) :\ \big(u_n = 3n + 1\big) \text{ et } \big(u_{n-1} = 3(n-1) + 1\big).$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{Q}(2)$ est vraie.
On a $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ (par définition) et $u_2 = 2u_1 - u_0 = 7$. Comme $3\times1+1 = 4$, et $3\times2+1 = 7$, $\mathcal{Q}(2)$ est vérifiée.

Itération : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Pour que $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 \text{ et } u_n = 3n + 1.$$

Or $\mathcal{Q}(n)$ vraie entraine que $u_n = 3n+1$ et $u_{n-1} = 3(n-1)+1$. Le terme $n+1$ de la suite étant défini par $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$ on obtient alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - u_{n-1} \\ &= 2(3n+1) - (3(n-1)+1) \\ &= 6n + 2 - 3n + 2 = 3(n+1) + 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence double* que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇

Exercice 1.6

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Correction Exercice La suite (a_n) est définie par la formule de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n-1}a_{n-2}.$$

Démonstration 1 : par récurrence forte. Soit $\mathcal{P}$ la propriété portant sur $n \geqslant 2$ (2 est le premier indice où la formule de récurrence intervient dans le calcul de u_n).

$$\mathcal{P}(n) :\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2.$$

Nous allons démontrer par récurrence forte que $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
On a $a_0 = a_1 = 1$ et, puisque $a_2 = a_0 + \frac{2}{1+1}a_1 = 2$, on a aussi $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$. $\mathcal{P}(2)$ est donc vraie.

Itération : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que, $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{P}(k)$ vraie (récurrence forte) et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Comme $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, on a

$$1 \leqslant a_n \leqslant n^2 \text{ et } 1 \leqslant a_{n-1} \leqslant (n-1)^2$$

et on doit en déduire que

$$1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2.$$

- Montrons tout d'abord que $a_{n+1} \geqslant 1$.
  Par définition, on a

  $$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n}a_{n-1}$$

  Comme $a_{n-1} \geqslant 1$ on a $\frac{2}{n}a_{n-1} \geqslant 0$ et donc

  $$a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 1 \text{ car } a_n \geqslant 1.$$

- Montrons ensuite que $a_{n+1} \leqslant (n+1)^2$.
  On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{2}{n} a_{n-1} \\ &\leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{(n+1)n^2 + 2(n-1)^2}{n+1} \\ &= \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \end{aligned}$$

  Il reste donc à démontrer que

$$\frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant (n+1)^2 = \frac{(n+1)^3}{n+1}$$

  c'est à dire comme $1/(n+1) \geqslant 0$

$$(n+1)^3 - (n^3+3n^2-4n+2) \geqslant 0.$$

  Or on a

$$\begin{aligned} &(n+1)^3 - (n^3+3n^2-4n+2) \\ =&(n^3+3n^2+3n+1) - (n^3+3n^2-4n+2) \\ =&7n-1 \geqslant 0 \text{ car } n \geqslant 1 \end{aligned}$$

  ce qui donne

$$a_{n+1} \leqslant \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant \frac{(n+1)^3}{n+1} = (n+1)^2.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence forte* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration 2 : par récurrence *double*. Soit $\mathcal{Q}$ la propriété portant sur $n \geqslant 1$

$$\mathcal{Q}(n) : \ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2 \text{ et } 1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Initialisation : Initialisation : Montrons que $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
On a $1 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 1^2$ et, puisque $a_2 = a_0 + a_1 = 2$, on a aussi $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$.

Itération : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
On a déjà $1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2$. D'autre part, on a

$$a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant 1$$

et

$$a_{n+2} \leqslant (n+1)^2 + \frac{2}{n+2} n^2 = \frac{(n+1)^2(n+2) + 2n^2}{n+2} = \frac{n^3+6n^2+5n+2}{n+2}.$$

Mais,

$$(n+2)^2 = \frac{(n+2)^3}{n+2} = \frac{n^3+6n^2+12n+8}{n+2} \geqslant \frac{n^3+6n^2+5n+2}{n+2}.$$

$\mathcal{Q}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence double* que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

◇

Exercice 1.7

On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et,

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = v_0 + \ldots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k. \tag{2}$$

Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n = 2^{n-1}$.

Correction Exercice On peux noter que (2) s'écrit aussi sous la forme

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = v_0 + \ldots + v_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k. \tag{3}$$

De plus, nous avons démontré dans l'exercice 7.5 que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4}$$

On note $\mathcal{P}$ la propriété portant sur $n \geqslant 1$ (1 est le premier indice où la formule de récurrence intervient dans le calcul de v_n).

$$\mathcal{P}(n) : v_n = 2^{n-1}.$$

On va démontrer par récurrence forte que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On a $v_0 = 1$ et

$$v_1 = \sum_{k=0}^{1-1} v_k = v_0 = 1.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Itération : Soit $n \geqslant 1$. Supposons que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{P}(k)$ vraie (récurrence forte) et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Pour que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que si la suite v_n est définie par (2) alors $v_{n+1} = 2^n$.
Par définition, on a

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Or $v_0 = 1$ et par hypothèse de récurrence forte, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$, $v_k = 2^{k-1}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \end{aligned}$$

En appliquant (4) avec $x = 2 \neq 1$, on a

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a donc *démontrer par récurrence forte* que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$\diamond$