

1 Relations

♥ Définition 1

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** sur E est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset E \times E$. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y (par \mathcal{R}), et on le note

$$x \mathcal{R} y.$$

On utilise la notation $x \not\mathcal{R} y$ pour dire $(x, y) \notin \mathcal{R}$.

♥ Définition 2

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** sur E est dite

- **réflexive** si

$$\forall x \in E, (x \mathcal{R} x),$$

- **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \iff (y \mathcal{R} x),$$

- **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x)) \implies (x = y),$$

- **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) \implies (x \mathcal{R} z).$$

♥ Définition 3

On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble E une **relation binaire** sur E qui est : **réflexive, antisymétrique et transitive**.

Un **ensemble ordonné** (E, \mathcal{R}) est un ensemble E muni d'une relation d'ordre \mathcal{R} .

♥ Définition 4

Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné. On dit que

- deux éléments x et y de E sont **comparables** si

$$(x \mathcal{R} y) \text{ ou } (y \mathcal{R} x),$$

- \mathcal{R} est une **relation d'ordre totale** si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \text{ et } y \text{ sont comparables},$$

- \mathcal{R} est une **relation d'ordre partielle** si la relation d'ordre n'est pas totale,
- (E, \mathcal{R}) est un **ensemble totalement ordonné** si \mathcal{R} est une **relation d'ordre totale**.

♥ Définition 5

1. Version du 25 novembre 2018 à 10:11

On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble E une relation binaire sur E qui est : **réflexive, symétrique et transitive**.



Exercice 1.1

Soient E un ensemble et \mathcal{R} une **relation binaire** sur E . Donner en formule (développée), les négations des propriétés suivantes :

1. \mathcal{R} est **réflexive**,
2. \mathcal{R} est **symétrique**,
3. \mathcal{R} est **antisymétrique**,
4. \mathcal{R} est **transitive**.

Correction Exercice

1. \mathcal{R} est **réflexive** si

$$\forall x \in E, (x \mathcal{R} x).$$

Donc \mathcal{R} n'est pas réflexive si

$$\exists x \in E, (x \not\mathcal{R} x).$$

2. \mathcal{R} est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \iff (y \mathcal{R} x),$$

Avant d'écrire la négation, on transforme tout d'abord l'équivalence précédente en une double implication :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left(((x \mathcal{R} y) \implies (y \mathcal{R} x)) \text{ et } ((y \mathcal{R} x) \implies (x \mathcal{R} y)) \right)$$

Ensuite on utilise

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\text{non}(\mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q})$$

pour obtenir une écriture équivalente de \mathcal{R} est **symétrique** :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left((\text{non}(x \mathcal{R} y) \text{ ou } (y \mathcal{R} x)) \text{ et } (\text{non}(y \mathcal{R} x) \text{ ou } (x \mathcal{R} y)) \right)$$

Donc \mathcal{R} n'est pas symétrique si

$$\exists (x, y) \in E^2, \left(\text{non}(\text{non}(x \mathcal{R} y) \text{ ou } (y \mathcal{R} x)) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(y \mathcal{R} x) \text{ ou } (x \mathcal{R} y)) \right)$$

qui s'écrit aussi

$$\exists (x, y) \in E^2, \left(((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \not\mathcal{R} x)) \text{ ou } ((y \mathcal{R} x) \text{ et } (x \not\mathcal{R} y)) \right)$$

3. \mathcal{R} est **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x)) \implies (x = y).$$

ce qui est équivalent à

$$\forall (x, y) \in E^2, \text{non}((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x)) \text{ ou } (x = y).$$

On a donc \mathcal{R} n'est pas antisymétrique si

$$\exists (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x) \text{ et } (x \neq y)).$$

4. \mathcal{R} est **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \left(((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) \implies (x \mathcal{R} z) \right).$$

qui s'écrit aussi

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \left(\text{non}((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) \text{ ou } (x \mathcal{R} z) \right).$$

On a donc \mathcal{R} n'est pas transitive si

$$\exists (x, y, z) \in E^3, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z) \text{ et } (x \not\mathcal{R} z)).$$

◇



Exercice 1.2

Sur \mathbb{Z} , on définit la relation \mathcal{R} par

$$x\mathcal{R}y \iff x = -y$$

Q. 1 Cette relation est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

Q. 2 Cette relation est-elle une relation d'ordre, une relation d'équivalence ?

Correction Exercice On note $E = \mathbb{Z}$.

Q. 1 • La relation est réflexive si

$$\forall x \in E, (x \mathcal{R} x).$$

Or $(x \mathcal{R} x)$ est équivalent à $(x = -x)$ ce qui est faux pour tout $x \neq 0$.

On va montrer que la relation n'est pas réflexive, c'est à dire

$$\exists x \in E, (x \not\mathcal{R} x).$$

Par exemple pour $x = 2$, on a $2 \neq -2$, qui est équivalent à $(2 \not\mathcal{R} 2)$. Ceci démontre que **la relation n'est pas réflexive**.

• La relation est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \iff (y \mathcal{R} x).$$

On a pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned} (x \mathcal{R} y) &\iff (x = -y) \\ &\iff (y = -x) \quad \text{en multipliant par } (-1) \\ &\iff (y \mathcal{R} x). \end{aligned}$$

On a donc démontré que **la relation est symétrique**.

• La relation est antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x)) \implies (x = y)$$

c'est à dire si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((x = -y) \text{ et } (y = -x)) \implies (x = y).$$

Or ici $((x = -y) \text{ et } (y = -x))$ est équivalent à $(x = -y)$. Ceci ne peut entrainer dans le cas général $(x = y)$ (sauf si $x = y = 0$).

On va démontrer que la relation n'est pas antisymétrique, c'est à dire

$$\exists (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x) \text{ et } (x \neq y)).$$

En effet, en prenant $x = 1$ et $y = -1$, on a bien

$$((1 \mathcal{R} -1) \text{ et } (-1 \mathcal{R} 1) \text{ et } (1 \neq -1)).$$

On a démontré que **la relation n'est pas antisymétrique**.

• La relation est transitive si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) \implies (x \mathcal{R} z)).$$

Or on a

$$\begin{aligned} ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) &\iff ((x = -y) \text{ et } (y = -z)) \\ &\implies (x = z). \end{aligned}$$

On ne peut donc pas avoir $(x = -z)$ dans le cas général.

On va montrer que la relation n'est pas transitive, c'est à dire

$$\exists (x, y, z) \in E^3, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z) \text{ et } (x \not\mathcal{R} z)).$$

En effet, en prenant $x = 1$, $y = -1$ et $z = 1$, on a bien

$$((1 \mathcal{R} -1) \text{ et } (-1 \mathcal{R} 1) \text{ et } (1 \not\mathcal{R} 1)).$$

Ceci démontre que **la relation n'est pas transitive**.

- Q. 2**
- Pour que \mathcal{R} soit une relation d'ordre, il faudrait qu'elle soit réflexive, antisymétrique et transitive or elle n'est ni antisymétrique ni transitive : **\mathcal{R} n'est pas une relation d'ordre.**
 - Pour que \mathcal{R} soit une relation d'équivalence, il faudrait qu'elle soit réflexive, symétrique et transitive or elle n'est ni symétrique ni transitive : **\mathcal{R} n'est pas une relation d'équivalence.**

◇



Exercice 1.3

Sur \mathbb{R} , on définit la relation \mathcal{R} par

$$x \mathcal{R} y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$$

Q. 1 Cette relation est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

Q. 2 Cette relation est-elle une relation d'ordre, une relation d'équivalence ?

Correction Exercice On note $E = \mathbb{R}$.

- Q. 1**
- La relation est réflexive si

$$\forall x \in E, (x \mathcal{R} x).$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x \mathcal{R} x) \iff (\cos^2 x + \sin^2 x = 1).$$

Comme $(\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$ est toujours vraie, on en déduit que **la relation est réflexive**.

- La relation est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \iff (y \mathcal{R} x).$$

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x \mathcal{R} y) \iff (\cos^2 x + \sin^2 y = 1).$$

Or, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

ou encore

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ et } \sin^2 y = 1 - \cos^2 y.$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} (x \mathcal{R} y) &\iff ((1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 1) \\ &\iff (\cos^2 y + \sin^2 x = 1) \\ &\iff (y \mathcal{R} x) \end{aligned}$$

On a donc démontré que **la relation est symétrique**.

- La relation est antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x)) \implies (x = y)$$

c'est à dire si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ((\cos^2 x + \sin^2 y = 1) \text{ et } (\cos^2 y + \sin^2 x = 1)) \implies (x = y).$$

Or si $x = y [\pi]$, on a bien $(\cos^2 x + \sin^2 y = 1)$ et $(\cos^2 y + \sin^2 x = 1)$ mais dans ce cas x peut être différent de y .

On va démontrer que la relation n'est pas antisymétrique, c'est à dire

$$\exists(x, y) \in E^2, \quad ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} x) \text{ et } (x \neq y)).$$

En effet, en prenant $x = 0$ et $y = 2\pi$, on a bien

$$((0 \mathcal{R} 2\pi) \text{ et } (2\pi \mathcal{R} 0) \text{ et } (0 \neq 2\pi)).$$

On a démontré que la **relation n'est pas antisymétrique**.

- La relation est transitive si

$$\forall(x, y, z) \in E^3, \quad ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) \implies (x \mathcal{R} z).$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned} ((x \mathcal{R} y) \text{ et } (y \mathcal{R} z)) &\iff ((\cos^2 x + \sin^2 y = 1) \text{ et } (\cos^2 y + \sin^2 z = 1)) \\ &\implies (\cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + \sin^2 z = 2) \text{ en sommant les deux égalités} \\ &\iff (\cos^2 x + 1 + \sin^2 z = 2) \text{ car } \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \\ &\iff (\cos^2 x + \sin^2 z = 1) \\ &\iff (x \mathcal{R} z) \end{aligned}$$

Ceci démontre que **la relation est transitive**.

- Q. 2**
- Pour que \mathcal{R} soit une relation d'ordre, il faudrait qu'elle soit réflexive, antisymétrique et transitive or elle n'est pas antisymétrique : **\mathcal{R} n'est pas une relation d'ordre**.
 - \mathcal{R} est une **relation d'équivalence**, car elle est réflexive, symétrique et transitive.

◇

Exercice 1.4

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique? réflexive? transitive?

Correction Exercice

- La relation n'est pas réflexive : une droite n'est pas orthogonale à elle-même.
- La relation est symétrique : si D est orthogonale à D' , alors D' est orthogonale à D .
- La relation n'est pas transitive : si D est orthogonale à D' et si D' est orthogonale à D'' , alors D et D'' ne sont pas orthogonales (elles sont parallèles ou confondues).

◇

Exercice 1.5

Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , la relation suivante :

$$A \mathcal{R} B \text{ si } A = B \text{ ou si } A = E \setminus B.$$

Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Correction Exercice On peut réécrire la définition de la relation \mathcal{R} :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, (A \mathcal{R} B) \iff (A = B) \text{ ou } (A = E \setminus B).$$

On va démontrer que la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence c'est à dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

- \mathcal{R} est réflexive si

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), (X \mathcal{R} X).$$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a $X = X$, et donc $X \mathcal{R} X$. La relation \mathcal{R} est donc réflexive.

- \mathcal{R} est symétrique si

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, (X \mathcal{R} Y) \iff (Y \mathcal{R} X).$$

Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. On a

$$(X \mathcal{R} Y) \iff (X = Y) \text{ ou } (X = E \setminus Y)$$

Or on sait que

$$(X = E \setminus Y) \iff (Y = E \setminus X)$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} (X \mathcal{R} Y) &\iff (Y = X) \text{ ou } (Y = E \setminus X) \\ &\iff (Y \mathcal{R} X). \end{aligned}$$

La relation \mathcal{R} est donc symétrique.

- \mathcal{R} est transitive si

$$\forall (X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3, \left(((X \mathcal{R} Y) \text{ et } (Y \mathcal{R} Z)) \implies (X \mathcal{R} Z) \right).$$

Soit $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$. On suppose que $X \mathcal{R} Y$ et $Y \mathcal{R} Z$. Il faut alors démontrer que $X \mathcal{R} Z$ pour que la relation soit transitive.

Comme $X \mathcal{R} Y$ on a

$$X = Y \text{ ou } X = E \setminus Y$$

Comme $Y \mathcal{R} Z$ on a

$$Y = Z \text{ ou } Y = E \setminus Z.$$

Il y a donc quatre cas :

- si $X = Y$ et $Y = Z$, alors $X = Z$ et donc $X \mathcal{R} Z$,
- si $X = Y$ et $Y = E \setminus Z$, alors $X = E \setminus Z$ et donc $X \mathcal{R} Z$,
- si $X = E \setminus Y$ et $Y = Z$, alors $X = E \setminus Z$ et donc $X \mathcal{R} Z$,
- si $X = E \setminus Y$ et $Y = E \setminus Z$, alors $X = E \setminus (E \setminus Z) = Z$ et donc $X \mathcal{R} Z$.

La relation \mathcal{R} est donc transitive.

La relation \mathcal{R} est donc une relation d'équivalence. ◇