Exo 22 Montrons que $\forall x \in [0,1] \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+x(e-1) \quad (1)$

On peut noter que l'inégalité (1) est équivalente à (en soustrayant 1 à (1))

$$x \leqslant e^x - 1 \leqslant x(e-1) \qquad (2)$$

* Si $x=0$, (2) est trivialement vérifiée
* Si $x \neq 0$, comme $x>0$ on peut diviser (2) par x (sans changer les sens des inégalités)

$$1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant e-1 \qquad (3)$$

Or $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0}$, on reconnait un accroissement finis de $f: t \to e^t$

f étant continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]0,x[$ tq $f'(c) = e^c = \frac{e^x-e^0}{x-0}$ $\quad (f'(t)=e^t)$

De plus la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $(f'(x)=e^x>0 \ \forall x \in \mathbb{R})$ et on a $0<c<x$ (car $c \in]0,x[$), ce qui donne

$$f'(0) \leqslant f'(c) \leqslant f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^0 \leqslant \frac{e^x-e^0}{x-0} \leqslant e^x$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{e^x-1}{x}$$

ce qui démontre l'inégalité de gauche de (3)

et donc l'inégalité de gauche de (1)

Pour démontrer que $\frac{e^x-1}{x} \leqslant e-1$ ou $e^x-1 \leqslant x(e-1)$ ou $e^x \leqslant 1+x(e-1)$, on va utiliser la convexité de $f: x \mapsto e^x$. En effet $f''(x)=e^x>0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$. D'après le théorème 7 f est convexe sur $[0,1]$ c'est à dire (voir définition fonction convexe sur un intervalle)

$$\forall t \in [0,1], \ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad f(x+t(y-x)) \leqslant f(x)+t(f(y)-f(x))$$

En prenant $x=0, y=1$, on obtient

$$f(t) \leqslant f(0)+t(f(1)-f(0))$$

$$\Leftrightarrow \quad e^t \leqslant e^0 + t(e^1-e^0) = 1+t(e-1)$$

On a donc $\forall t \in [0,1] \quad e^t \leqslant 1+t(e-1)$

ce qui démontre l'inégalité de droite de (1)