Mathématiques 1 – TD 4

Exercice 1 *Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?*

- $f_1 : \mathbb{R} \to [-1,1]$ *définie par* $f_1(x) := \cos x$.
- $f_2 : [2,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *définie par* $f_2(x) := \sqrt{x} - 1$.
- $f_3 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *définie par* $f_3(x) := \tan x$.
- $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_4(x) := x \sin x$.

Exercice 2 *Démontrer que la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) := x^2+2x+3$ réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble Y à déterminer. Décrire sa fonction réciproque.*

Exercice 3 *Soit a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant $ad - bc > 0$ et $c \neq 0$ et soit* $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1. *Déterminer l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression.*
2. *Calculer la dérivée de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, et établir le tableau de variations de f.*
3. *En déduire l'image $f(D)$ et justifier que f réalise une bijection de D dans $f(D)$.*
4. *Déterminer la bijection réciproque de f.*

Exercice 4 *On pose* $f(x) := \sqrt[4]{x^3 - 11} - 2$.

1. *Quel est l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression ?*
2. *Sans calculer la dérivée de f, trouver le sens de variation de f.*
3. *En déduire que f réalise une bijection de D sur un ensemble Y à déterminer.*
4. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire l'ensemble X tel que f réalise une bijection de X sur $[0,+\infty[$.*

Exercice 5 *Dériver les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ associées aux expressions suivantes et étudier le signe de leurs dérivées :*

$$x \mapsto x^{1/x} \text{ et } x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} .$$

Exercice 6 *Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(4,0)$, $B(4,2)$ et $C(3,3)$. Dessiner les triangles rectangles OAB et OBC. Montrer par un raisonnement géométrique que l'on a :*

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 7

1. *À l'aide de la dérivation, montrer que la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) := \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.*
2. *Retrouver ce résultat en utilisant la relation $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$.*

Exercice 8 *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{Arcsin} x = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 9 (Examen 2017)

1. *Pour quelles valeurs de x a-t-on $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$?*
2. *Pour quelles valeurs de x a-t-on $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$?*
3. *Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes en justifiant les différentes étapes du calcul :*

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) \quad , \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) \quad , \quad \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

4. *Résoudre les équations suivantes :*

$$\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 10 *Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ par*

$$f(x) := \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) .$$

En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$.

Exercice 11 (Examen 2018)

1. *Pour quelles valeurs de* x *a-t-on* $\text{Arcsin}\,(\sin x) = x$ *?*

2. *On considère les fonctions* f_1 *et* f_2 *définies sur l'intervalle* $[-2, 2]$ *par* $f_1(x) = \text{Arcsin}\,(\frac{x}{2})$ *et* $f_2(x) = 2\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)$. *Calculer* $f_1(0)$, $f_2(0)$, $f_1(1)$ *et* $f_2(1)$.

3. *Calculer les dérivées des fonctions* f_1 *et* f_2 *sur l'intervalle* $]-2, 2[$. *En déduire une relation simple entre* f_1 *et* f_2 *sur l'intervalle* $]-2, 2[$, *puis sur* $[-2, 2]$.