Exo 3

1.

2.

3. Il faut vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

* Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = (x+1)^2$ qui est polynomiale donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ continue et dérivable sur $]-\infty, 0[\subset \mathbb{R}$

sa dérivée est $f'(x) = 2(x+1)$

* Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = 2\ln(x+1) + 1$

On note $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+1$ et $v :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x+1)$

On a alors $f(x) = u \circ v(x)$ comme $]0, +\infty[\subset]-1, +\infty[$

on en déduit que f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composé de 2 fonctions continues. De même pour la dérivabilité.

Sa dérivée est $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ car $\rightarrow$

En posant $w(x) = x+1$, $w'(x) = 1$
$r(x) = \ln(x)$, $r'(x) = \dfrac{1}{x}$
$v(x) = r \circ w(x)$
$\Rightarrow v'(x) = w'(x)\, r'(w(x))$
$= 1 \times \dfrac{1}{x+1}$

d'où $f'(x) = \dfrac{2}{x+1}$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en 0, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et on a

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \quad (\rightarrow \text{résultat du 2.}) \\ 2\ln(x+1) + 1 & \end{cases}$$