INSTITUT GALILÉE
DÉP. DE MATHÉMATIQUES
Licence sciences 1er semestre.

Nom Prénom :

2018–2019
date: 26/09/2019

Contrôle sur le chapitre 1 - Groupe 14 - durée 30mn

Tous les calculs devront être détaillés.

/14

1. On pose $z_1 := \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 := 1 - i$. • Ecrire les nombres z_1 et z_2 sous forme polaire.

$|2z_1|^2 = 6+2 = 8 \quad |z_1| = \sqrt{2} \quad z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/6}$ 1

2 $|z_2| = \sqrt{2} \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ 1

• Ecrire le quotient $Z := \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme polaire.

1 $Z = z_1 z_2^{-1} = e^{-i\pi/6} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{\pi}{12}(3-2)} = e^{+i\pi/12}$

• En conclure les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ 2 et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ 1.

$Z = e^{+i\pi/12} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{2}$ or $Z = e^{-i\pi/6}e^{i\pi/4} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2 d'où $Z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

2. Calculer, sous la forme $x + iy$, le nombre complexe $z := \dfrac{(1+i)^4}{(2-2i)^4}$

On a $|1+i| = \sqrt{2}$. $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$|2-2i| = 2\sqrt{2} \quad 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

3 $z = \dfrac{(1+i)^4}{(2-2i)^4} = \left(\dfrac{1+i}{2-2i}\right)^4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}e^{i\pi/2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 = \frac{1}{16}$

$z = \frac{1}{16} + 0i$

3. • Mettre sous forme algébrique $x + iy$ le nombre complexe $2e^{-\frac{7\pi i}{3}}$.

$$2e^{-\frac{7\pi i}{3}} = 2e^{-\frac{6\pi+\pi}{3}i} = 2\underbrace{e^{-2i\pi}}_{=1} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ 1

$$= 1 - i\sqrt{3}$$

• Mettre sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$ le nombre complexe $(1-\sqrt{3}i)(1+i)$.

$|1-\sqrt{3}\,i| = 2 \qquad 1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\pi/3}$

$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (voir 2.)

$(1+i)(1-\sqrt{3}\,i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \times 2\, e^{-i\pi/3} = 2\sqrt{2}e^{i(\pi/4-\pi/3)} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$ 2

4. Déterminer et dessiner l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|\frac{z+1}{z-i}\right| = 1$.

on a donc $|z+1| = |z-i|$. Avec $z = x+iy$ on obtient

$|x+1+iy| = |x+i(y-1)| \Leftrightarrow |x+1+iy|^2 = |x+i(y-1)|^2$

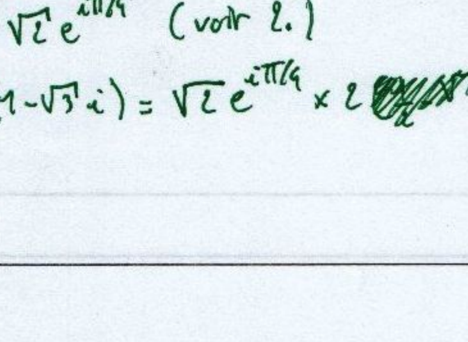
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1}$ 2

$\Leftrightarrow 2x = -2y \Leftrightarrow y = -x$

$z = x - ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C'est l'équation d'une droite



1