**L3-Math** **Analyse Numérique**
**Institut Galilée** **Année 2012-2013**

# Devoir 1
## A rendre le 19 octobre 2012

## Exercice 1

On définit $\mathbb{A}^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} a^{(n)}_{i,i+1} = a^{(n)}_{i+1,i} &= 1, \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ a^{(n)}_{ii} &= -2, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \\ a^{(n)}_{ij} &= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

**Q. 1** *On note $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$*

1. *Montrer que*
$$P_n(\lambda) = -(\lambda+2) P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \tag{1.1}$$
2. *En effectuant le changement de variable $\lambda + 2 = -2\cos\theta$ établir que*
$$P_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}. \tag{1.2}$$
3. *En déduire les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$* ▪

Soit $\mathbb{I}$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère, dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$, les matrices blocs suivantes :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^{(n)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{I} & -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbb{I} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{I} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I} & -2\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

**Q. 2** *On suppose que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{A}^{(n)}$ sont toutes distinctes. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ en fonction de ceux de $\mathbb{A}^{(n)}$ (sans calculer explicitement les espaces propres de $\mathbb{A}^{(n)}$).* ▪