Devoir 1
A rendre le 19 octobre 2012
Correction

Exercice 1

On définit $\mathbb{A}^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} a_{i,i+1}^{(n)} = a_{i+1,i}^{(n)} &= 1, \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!] \\ a_{ii}^{(n)} &= -2, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \\ a_{ij}^{(n)} &= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Q. 1 *On note $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$*

1. *Montrer que*
$$P_n(\lambda) = -(\lambda+2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \tag{1.1}$$
2. *En effectuant le changement de variable $\lambda + 2 = -2\cos\theta$ établir que*
$$P_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}. \tag{1.2}$$
3. *En déduire les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$* ▪

Soit $\mathbb{I}$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère, dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$, les matrices blocs suivantes :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^{(n)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{I} & -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbb{I} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{I} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I} & -2\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Q. 2 *On suppose que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{A}^{(n)}$ sont toutes distinctes. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ en fonction de ceux de $\mathbb{A}^{(n)}$ (sans calculer explicitement les espaces propres de $\mathbb{A}^{(n)}$).* ▪

Correction

Q. 1 1. Montrons que
$$P_n(\lambda) = -(\lambda+2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda), \quad \forall n \geqslant 3.$$

On note $\mathbb{I}^{(n)}$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a, par définition du polynôme caractéristique,

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det\left(\mathbb{A}^{(n)} - \lambda\mathbb{I}^{(n)}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} -(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2) \end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= (-1)^{1+1}\times(-(\lambda+2))\times\det\begin{pmatrix}-(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})}\\
&\quad +(-1)^{2+1}\times 1\times\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\det\begin{pmatrix}-(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} = \det\left(\mathbb{A}^{(n-1)}-\lambda\mathbb{I}^{(n-1)}\right) = P_{n-1}(\lambda)$$

et, en développant par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} &= \det\begin{pmatrix}-(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}_{\in\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})}\\
&= P_{n-2}(\lambda).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$P_n(\lambda) = -(\lambda+2)\,P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda).$$

2. On va démontrer la formule (1.2) par récurrence sur n.
On vérifie tout d'abord la validité de la formule au rang $n=1$. On a

$$P_1(\lambda) = \det\left(\mathbb{A}^{(1)}-\lambda\mathbb{I}^{(1)}\right) = -(\lambda+2).$$

Avec le changement de variable $\lambda+2=-2\cos\theta$, on obtient

$$P_1(\lambda) = 2\cos\theta$$

or $\sin(2\theta)=2\cos\theta\sin\theta$ d'où

$$P_1(\lambda) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}.$$

La formule (1.2) est donc vraie au rang $n=1$.
Pour mieux comprendre la démonstration, on peut aussi vérifier la formule au rang $n=2$. On a

$$P_2(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

$$
\begin{aligned}
P_2(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda+3)\\
&= ((\lambda+2)-1)((\lambda+2)+1)\\
&= \left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}+1\right)\\
&= \left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}\right)^2-1\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\left(\frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{2i}\right)^2-\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\
&= \frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

La formule (1.2) est donc vraie au rang $n=2$.
On suppose la formule (1.2) vraie **jusqu'au** rang $n-1$, $n\geqslant 3$. L'hypothèse de récurrence forte est la suivante, $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$,

$$(\mathcal{H}_k)\ :\ P_k(\lambda)=\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$$

On va démontrer que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. On a

$$
\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= -(\lambda+2)P_{n-1}(\lambda)-P_{n-2}(\lambda)\\
&= \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}-\frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta}\ \text{(on utilise $(\mathcal{H}_{n-1})$ et $(\mathcal{H}_{n-2})$)}\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\sin(2\theta)\sin(n\theta)-\sin\theta\sin((n-1)\theta)\right]\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)-\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(e^{i(n-1)\theta}-e^{-i(n-1)\theta}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[\begin{array}{c} e^{i(n+2)\theta}-e^{i(n-2)\theta}-e^{-i(n-2)\theta}+e^{-i(n+2)\theta}\\ -\left(+e^{in\theta}-e^{i(n-2)\theta}-e^{i(n-2)\theta}+e^{-in\theta}\right)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[e^{i(n+2)\theta}+e^{-i(n+2)\theta}-e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right]\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right)\\
&= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.
\end{aligned}
$$

On a donc démontré que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. Ce qui achève la démonstration par récurrence de la formule (1.2).

3. Les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$ sont les racines de son polynôme caractéristique P_n. Or ce polynôme s'annule lorsque

$$(n+1)\theta=k\pi,\ k\in[\![1,n]\!]$$

c'est à dire pour

$$\theta_k=\frac{k\pi}{n+1},\ k\in[\![1,n]\!].$$

Les n valeurs propres distinctes de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$ sont donc

$$\lambda_k=-2(1+\cos(\theta_k))=-2\left(1+\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right),\ k\in[\![1,n]\!].$$

■

Q. 2 On a vu que la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$ possède n valeurs propres distinctes. On note $\boldsymbol{v}^k = \left(v_j^k\right) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre de $\mathbb{A}^{(n)}$ associé à la valeur propre λ_k.

On étudie tout d'abord les éléments propres de la matrice $\mathbb{B}$.
Pour tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère le vecteur $\boldsymbol{V}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n^2}$ défini par

$$\boldsymbol{V}^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \alpha_2 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\boldsymbol{V}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^{(n)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \alpha_2 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbb{A}^{(n)} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \alpha_2 \mathbb{A}^{(n)} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathbb{A}^{(n)} \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_k \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \alpha_2 \lambda_k \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_k \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \lambda_k \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \alpha_2 \boldsymbol{v}^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \lambda_k \boldsymbol{V}^{(k)}
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(\lambda_k, \boldsymbol{V}^{(k)})$ est un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. De plus, l'espace propré $\mathcal{E}_k$ associé est engendré par les n vecteurs linéairement indépendants

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{v}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Pour chaque valeur propre λ_k, $k \in [\![1, n]\!]$, de la matrice $\mathbb{B}$ correspond un espace propre $\mathcal{E}_k$ de dimension n. Comme $\dim(\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n) = \dim(\mathcal{E}_1) + \cdots + \dim(\mathcal{E}_n) = n^2$, on a bien construit l'ensemble des espaces propres de la matrice $\mathbb{B}$.

On étudie ensuite la matrice $\mathbb{C}$. Nous avons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les relations suivantes

$$\begin{cases} -2v_1^k + v_2^k = \lambda_k v_1^k \\ v_{j-1}^k - 2v_j^k + v_{j+1}^k = \lambda_k v_j^k, \text{ pour } 1 < j < n, \\ v_{n-1}^k - 2v_n^k = \lambda_k v_n^k \end{cases}$$

Pour tout vecteur $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, considérons le vecteur $\boldsymbol{W}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n^2}$ défini par

$$\boldsymbol{W}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} v_1^k \\ \boldsymbol{J} v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{J} v_n^k \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\boldsymbol{W} &= \begin{pmatrix} -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{I} & -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbb{I} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{I} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I} & -2\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}v_1^k \\ \boldsymbol{J}v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}v_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{J}v_1^k + \boldsymbol{J}v_2^k \\ \boldsymbol{J}v_1^k - 2\boldsymbol{J}v_2^k + \boldsymbol{J}v_3^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}v_{n-2}^k - 2\boldsymbol{J}v_{n-1}^k + \boldsymbol{J}v_n^k \\ \boldsymbol{J}v_{n-1}^k - 2\boldsymbol{J}v_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}(-2v_1^k + v_2^k) \\ \boldsymbol{J}(v_1^k - 2v_2^k + v_3^k) \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}(v_{n-2}^k - 2v_{n-1}^k + v_n^k) \\ \boldsymbol{J}(v_{n-1}^k - 2v_n^k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}(\lambda_k v_1^k) \\ \boldsymbol{J}(\lambda_k v_2^k) \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}(\lambda_k v_{n-1}^k) \\ \boldsymbol{J}(\lambda_k v_n^k) \end{pmatrix} \\
&= \lambda_k \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}v_1^k \\ \boldsymbol{J}v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}v_{n-1}^k \\ \boldsymbol{J}v_n^k \end{pmatrix} \\
&= \lambda_k \boldsymbol{W}^{(k)}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(\lambda_k, \boldsymbol{W}^{(k)})$ est un élément propre de la matrice $\mathbb{C}$. De plus, en notant $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'espace propre $\mathcal{F}_k$ associé est engendré par les n vecteurs linéairement indépendants

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 v_1^k \\ \boldsymbol{e}_1 v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_1 v_n^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 v_1^k \\ \boldsymbol{e}_2 v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_2 v_n^k \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_n v_1^k \\ \boldsymbol{e}_n v_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n v_n^k \end{pmatrix}.$$

Ce qui correspond aux choix successifs de $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_n$.
Pour chaque valeur propre λ_k, $k \in [\![1, n]\!]$, de la matrice $\mathbb{C}$ correspond un espace propre $\mathcal{F}_k$ de dimension n. Comme $\dim(\mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_n) = \dim(\mathcal{F}_1) + \cdots + \dim(\mathcal{F}_n) = n^2$, on a bien construit l'ensemble des espaces propres de la matrice $\mathbb{C}$. ▪

◊