L3-Math **Analyse Numérique**
Institut Galilée **Année 2012-2013**

Devoir 2

A rendre le 21 décembre 2012

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, On note T_n la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{lllll} T_n & : & [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \cos(n \arccos(t)). \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Q. 1 *1. Donner la relation de récurrence qui permet de calculer T_{n+1} en fonction de T_n et T_{n-1}.*

2. Montrer que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient du terme de degré n est 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$. T_n est appelé polynôme de Tchebicheff de degré n. ∎

Q. 2 *On note $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Montrer que les polynômes de Tchebicheff sont $w-$orthogonaux.* ∎

Q. 3 *1. Déterminer les racines $(z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ du polynôme T_n. Ces racines sont appelées les n points d'interpolation de Tchebycheff sur $[-1;1]$.*

2. Déterminer les extremas de T_n et les valeurs de T_n en ces points.

3. En déduire $\displaystyle\max_{t \in [-1;1]} |T_n(t)|$. ∎

On note $\boldsymbol{Z} = (z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ et $\pi_n^{\boldsymbol{Z}}(t) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(t - z_i)$.

Q. 4 *Exprimer T_n en fonction de $\pi_n^{\boldsymbol{Z}}$.* ∎

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient directeur est 1.

Q. 5 *Montrer que $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$,*

$$\max_{t \in [-1;1]} |\mathrm{P}(t)| \geqslant \max_{t \in [-1;1]} |\pi_n^{\boldsymbol{Z}}(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.2}$$

∎

On se place sur l'intervalle $[a;b]$. Les n points d'interpolation de Tchebicheff sur $[a;b]$, noté $(w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$, sont définis comme les images des points $(z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ par la bijection affine g qui envoie -1 en a et $+1$ en b.

Q. 6 *Déterminer les points $(w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$.* ∎

On note $\boldsymbol{W} = (w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ et $\pi_n^{\boldsymbol{W}}(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x - w_i)$.

Q. 7 *1. Exprimer $\pi_n^{\boldsymbol{W}}$ en fonction de T_n.*

2. Soient $\mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$ et Q l'application définie par

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{Q} & : & [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \left(\frac{2}{b-a}\right)^n \mathrm{P} \circ g(t) \end{array}\right. .$$

Montrer que $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_n$.

3. *En déduire que,* $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$,

$$\max_{x\in[a;b]} |\,\mathrm{P}(x)| \geqslant \max_{x\in[a;b]} |\pi_n^{\boldsymbol{W}}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n. \tag{1.3}$$

■

Soient $\boldsymbol{X} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, $n \geqslant 3$, une suite de points distincts de l'intervalle $[a, b]$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$. On note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.
On rappelle que $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{1.4}$$

avec $\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Q. 8 *Quel choix de points* $\boldsymbol{X} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ *permettent de minimiser* $|\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x)|$*? Justifier.* ■