L3-Math **Analyse Numérique**
Institut Galilée **Année 2012-2013**

Devoir 2

A rendre le 21 décembre 2012

Correction

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, On note T_n la fonction définie par

$$\left\{ \begin{array}{llll} T_n & : & [-1;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto \cos(n \arccos(t)). \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Q. 1 *1. Donner la relation de récurrence qui permet de calculer T_{n+1} en fonction de T_n et T_{n-1}.*

2. Montrer que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient du terme de degré n est 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$. T_n est appelé polynôme de Tchebicheff de degré n. ∎

Q. 2 *On note $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Montrer que les polynômes de Tchebicheff sont $w-$orthogonaux.* ∎

Q. 3 *1. Déterminer les racines $(z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ du polynôme T_n. Ces racines sont appelées les n points d'interpolation de Tchebycheff sur $[-1;1]$.*

2. Déterminer les extremas de T_n et les valeurs de T_n en ces points.

3. En déduire $\max_{t \in [-1;1]} |T_n(t)|$. ∎

On note $\boldsymbol{Z} = (z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ et $\pi_n^{\boldsymbol{Z}}(t) = \prod_{i=0}^{n-1}(t - z_i)$.

Q. 4 *Exprimer T_n en fonction de $\pi_n^{\boldsymbol{Z}}$.* ∎

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient directeur est 1.

Q. 5 *Montrer que $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$,*

$$\max_{t \in [-1;1]} |\,\mathrm{P}(t)| \geqslant \max_{t \in [-1;1]} |\pi_n^{\boldsymbol{Z}}(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.2}$$

∎

On se place sur l'intervalle $[a;b]$. Les n points d'interpolation de Tchebicheff sur $[a;b]$, noté $(w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$, sont définis comme les images des points $(z_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ par la bijection affine g qui envoie -1 en a et $+1$ en b.

Q. 6 *Déterminer les points $(w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$.* ∎

On note $\boldsymbol{W} = (w_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ et $\pi_n^{\boldsymbol{W}}(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - w_i)$.

Q. 7 *1. Exprimer $\pi_n^{\boldsymbol{W}}$ en fonction de T_n.*

2. Soient $\mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$ et Q l'application définie par

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathrm{Q} & : & [-1;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto \left(\frac{2}{b-a}\right)^n \mathrm{P} \circ g(t) \end{array} \right. .$$

Montrer que $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_n$.

3. En déduire que, $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{E}_n$,

$$\max_{x\in[a;b]} |\,\mathrm{P}(x)| \geqslant \max_{x\in[a;b]} |\pi_n^{\boldsymbol{W}}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n . \tag{1.3}$$

■

Soient $\boldsymbol{X} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, $n \geqslant 3$, une suite de points distincts de l'intervalle $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$. On note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.
On rappelle que $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{1.4}$$

avec $\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Q. 8 *Quel choix de points* $\boldsymbol{X} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ *permettent de minimiser* $|\pi_{n+1}^{\boldsymbol{X}}(x)|$*? Justifier.* ■

Q1 1)

$$T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x))$$

Or $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\qquad a = \operatorname{Arccos}(x)$, $b = n\operatorname{Arccos}(x)$

d'où $T_{n+1}(x) = \cos(\operatorname{Arccos}(x))\cos(n\operatorname{Arccos}(x)) - \sin(\operatorname{Arccos}(x))\sin(n\operatorname{Arccos}(x))$

$$T_{n+1}(x) = x\, T_n(x) - \sin(\operatorname{Arccos}(x))\sin(n\operatorname{Arccos}(x)) \qquad (1)$$

De plus

$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\operatorname{Arccos}(x))$ $\qquad a = -\operatorname{Arccos}(x)$, $b = n\operatorname{Arccos}(x)$

$= \cos(-\operatorname{Arccos}(x))\cos(n\operatorname{Arccos}(x)) - \sin(-\operatorname{Arccos}(x))\sin(n\operatorname{Arccos}(x))$

$$T_{n-1}(x) = x\, T_n(x) + \sin(\operatorname{Arccos}(x))\sin(n\operatorname{Arccos}(x)) \qquad (2)$$

En sommant (1) et (2) on obtient

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\, T_n(x) & \forall x \in [-1,1] \qquad (3) \\ \text{avec } T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x \end{cases}$$

Q1 2) Montrer que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient du terme de degré n est 2^{n-1} $(n \geq 1)$

On procède par récurrence : $\qquad T_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

$$T_1 \in \mathcal{P}_1 \quad \text{et} \quad a_1 = 2^{1-1} = 1$$

$$(H_n) \begin{cases} T_n \in \mathcal{P}_n \quad \text{et} \quad a_n = 2^{n-1} \\ \text{avec } T_n = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \end{cases}$$

On suppose (H_i) vraie pour $i \in [\![1, n]\!]$. Montrons que (H_{n+1}) est vérifiée.

On a, par hyp. de récurrence, $T_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}$ et $T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \underbrace{\dots}_{d^\circ n-2}$

$T_n \in \mathcal{P}^n$ et $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \underbrace{\dots}_{d^\circ n-1}$

Donc $T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \in \mathcal{P}^{n+1}$

$= 2^n x^{n+1} + \underbrace{\quad}_{d^\circ n}$, ce qui prouve (H_{n+1}).

Q_2 On note $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que les polynômes de Tchebichev T_n sont w-orthogonaux.

Il faut démontrer que

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \alpha_{n,m} \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases}$$

On effectue le changement de variable $x = \cos(\theta)$ $\quad dx = -\sin(\theta)\, d\theta$

$$I_{n,m} = \int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\frac{1}{|\sin(\theta)|}(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\underbrace{\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}}_{=1 \text{ sur } [0,\pi]} d\theta$$

Or $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

d'où $\quad \cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\right)$

On a donc

$$I_{n,m} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-m)\theta)\, d\theta$$

si $n+m \neq 0$ (ie $n \neq 0$ et $m \neq 0$)

$$\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta)\, d\theta = \frac{1}{n+m}\left[\sin((n+m)\theta)\right]_0^{\pi} = 0$$

si $n-m \neq 0$ (ie $n \neq m$)

$$\int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)\, d\theta = \frac{1}{n-m}\left[\sin((n-m)\theta)\right]_0^{\pi} = 0$$

D'où

$$I_{n,m} = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q3 1) Determiner $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ les n racines du polynôme T_n notée

On cherche les solutions de

$$T_n(x) = 0 \iff \cos\left(n \operatorname{Arccos}(x)\right) = 0$$

$$\iff n \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \operatorname{Arccos}(x) = \pi\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z} \iff x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \ k \in [\![0,n-1]\!]$$

On a donc $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k \in [\![0,n-1]\!]$

Q3 2) Déterminer les extrema de T_n et les valeurs de T_n en ces points.

Les extrema de T_n sont solution de

$$T_n'(x) = 0$$

On a $(\operatorname{Arccos}(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$T_n'(x) = \cos\left(n \operatorname{Arccos}(x)\right)' = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \times \left(-\sin\left(n \operatorname{Arccos}(x)\right)\right)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin\left(n \operatorname{Arccos}(x)\right)$$

$$T_n'(x) = 0 \iff \sin\left(n \operatorname{Arccos}(x)\right) = 0$$

$$\iff n \operatorname{Arccos}(x) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \operatorname{Arccos}(x) = \frac{k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k \in [\![0,n]\!]$$

On note $x_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ $k \in [\![0,n]\!]$ les extrema de T_n.

On a $T_n(x_k') = \cos\left(n \operatorname{Arccos}(\cos\frac{k\pi}{n})\right) = \cos\left(n \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

Q3.3) En déduire $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$.

Comme les x_k' sont des extrema de T_n, on a $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \max\limits_{k\in[\![0,n]\!]} |T_n(x_k')| = 1$

$z = (z_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$

On note $\tilde{\Pi}_n^z(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - z_i)$

Q4] Exprimer T_n en fonction de $\tilde{\Pi}_n^z$

T_n est un polynôme de d° n admettant $(z_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ comme zéros

donc $$T_n(t) = \alpha \prod_{i=0}^{n-1} (t - z_i) = \alpha \tilde{\Pi}_n^z(t)$$

Or le coefficient du terme de degré n dans T_n est 2^{n-1} d'où

$$T_n(t) = 2^{n-1} \tilde{\Pi}_n^z(t) \qquad (Q_4-1)$$

. ~~$\tilde{\Pi}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$~~

. $\mathcal{E}_n = \{ p \in \mathcal{S}_n$ tq le coef. du terme de degré n est $1\}$

Q5] Montrer que $\forall P \in \mathcal{E}_n$

$$\max_{t\in[-1,1]} |P(t)| \geqslant \max_{t\in[-1,1]} |\Pi_n^z(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

. On a démontré que les extremas de T_n étaient atteints aux points

$(z'_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$, $z'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

et $T_n(z'_k) = (-1)^k$

On a donc d'après (Q_4-1)
$$\max_{t\in[-1,1]} |\Pi_n^z(t)| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{t\in[-1,1]} |T_n(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

. On démontre l'inégalité par l'absurde :

On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{E}_n$, $q \neq \Pi_n^z$ tq

$$\max_{t\in[-1,1]} |Q(t)| < \max_{t\in[-1,1]} |\Pi_n^z(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (Q_5-1)$$

On pose $R = \Pi_n^z - Q$. R est un polynôme de d° $n-1$ car

Π_n^z et Q appartiennent à $\mathcal{E}_n$: les termes en t^n s'annulent dans $\Pi_n^z(t) - Q(t)$!

On a, $\forall k \in [\![0,n]\!]$
$$R(z'_k) = \Pi_n^z(z'_k) - Q(z'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - Q(z'_k).$$

Par hypothèse (Q_5-1)

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < Q(t) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc, $\forall k \in [\![0,n]\!]$

$$\frac{(-1)^k - 1}{2^{n-1}} < R(z'_k) < \frac{(-1)^k + 1}{2^{n-1}}$$

si k est paire

$$0 < R(z'_k) < \frac{2}{2^{n-1}}$$

si k est impaire

$$-\frac{2}{2^{n-1}} < R(z'_k) < 0$$

On obtient que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $R(z'_k)$ et $R(z'_{k+1})$ sont non nuls et de signe différent, ~~c'est à dire~~ ce qui entraine que R s'annule dans $]z'_k, z'_{k+1}[$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$ et donc R admet n zéros sur $[-1,1]$. Or $R \in \mathcal{P}^{n-1}$ d'où $R \equiv 0$ i.e $Q \equiv \Pi_n^2$
D'où contradiction.

Q_6 On se place sur l'intervalle $[a;b]$.

On note $g : [-1,1] \to [a,b]$
$t \mapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$

On a donc

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad k \in [\![0,n-1]\!]$$

$W = (w_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$

Q7 On pose $\Pi_n^W(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - w_i)$

1. Exprimer Π_n^W en fonction de T_n

On a, avec le changement de variable $x = g(t)$, $w_i = g(z_i)$

$$\Pi_n^W(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - w_i) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z_i\right) \right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \prod_{i=0}^{n-1} (t - z_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \Pi_n^Z(t)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$$

$$= 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n(g^{-1}(x)) \qquad g^{-1}(x) = \frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

2.

3. On a

$$\max_{x \in [a,b]} |\Pi_n^W(x)| = \max_{x \in [a,b]} 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \overset{ok}{|T_n(g^{-1}(x))|}$$

$$= 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \max_{t \in [-1,1]} |T_n(t)|$$

$$= 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \qquad \text{car sur } [-1,1] \quad |T_n(t)| \leq 1$$
$$\text{et } = 1 \text{ au point } z_k' \ldots$$

Il nous reste à démontrer que $\forall P \in \mathscr{C}_n$

$$\max_{x \in [a,b]} |P(x)| \geq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

On pose $Q : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad t \longmapsto P \circ g(t) \times \left(\frac{2}{b-a}\right)^n$

Alors $Q \in \mathbb{R}^n$ car composé d'un polynôme de $d^\circ n$ et d'une applicat° affine.

De plus $P \in \mathscr{C}^n$ donc $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

D'où $P \circ g(t) = P\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

et donc $Q \in \mathscr{C}_n$.

Q7 3 suite

$$\max_{x\in[a,b]} |P(x)| = \max_{t\in[-1,1]} |P\circ g(t)|$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{t\in[-1,1]} |Q(t)|$$

D'après (3.2) on obtient, comme $Q \in \mathscr{C}_n$,

$$\max_{x\in[a,b]} |P(x)| \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{t\in[-1,1]} |\Pi_n^z(t)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

Q8 le meilleur choix est de prendre les n+1 points de Tchebychef de l'intervalle $[a;b]$: $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ $z_k =$

car $\forall X$, $\Pi_{n+1}^X \in \mathscr{C}'_n$ et d'après (3.3)

$$\max_{x\in[a,b]} \left|\Pi_{n+1}^X(x)\right| \geq \max_{x\in[a,b]} \left|\Pi_{n+1}^z(x)\right| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$