L3-Math **Analyse Numérique**
Institut Galilée **Année 2012-2013**

Travaux dirigés - 1

1 Remise en forme

Exercice 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$. Que peut-on en conclure?* ▪

Q. 2 *Calculer si possible l'inverse de la matrice $\mathbb{A}$ en utilisant la technique de la matrice augmentée.* ▪

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{v} \rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Exprimer les éléments de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de ceux de la matrice $\mathbb{A}$.

Exercice 3

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{3.1}$$

Conclure. ▪

Exercice 4

Q. 1 *Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible et symétrique, montrer que $\mathbb{A}^{-1}$ est symétrique.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée telle que $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ est inversible. Montrer que*

$$\mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{A}.$$

Q. 3 *Soient $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ des matrices carrées inversibles de même dimension telle que $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ soit inversible. Montrer que*

$$\mathbb{A}(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\mathbb{A} = \left(\mathbb{A}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\right)^{-1}$$

Exercice 5

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n$. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n$.

Q. 1 1. *Que peut-on dire des matrices $\mathbb{A}^*$ et $(\mathbb{A}^*)^*$?*

2. *Montrer que $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ est triangulaire supérieure.*

3. *Montrer que* $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{F}$ *est triangulaire inférieure.*
4. *Que peut-on dire des matrices* $\mathbb{A}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}\mathbb{A}$*?* ▪

Q. 2 1. *Calculer* $\det(\mathbb{A})$.

2. *Déterminer les valeurs propres de* $\mathbb{A}$.
3. *Que peut-on dire si les éléments diagonaux de* $\mathbb{A}$ *sont tous distincts?* ▪

Q. 3 *Soit* $\mathbb{D}$ *la matrice définie par*

$$\mathbb{D}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *La matrice* $\mathbb{D}$ *est-elle inversible? Si oui calculer son inverse.*
2. *Pour chacune des valeurs propres, déterminer l'espace propre associé.*
3. *La matrice* $\mathbb{D}$ *est-elle diagonalisable? Justifier.* ▪

Exercice 6

Etant donnée une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on pose

$$\mathbb{D} = \mathbb{A} + \imath\mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

Sous certaines hypothèses à préciser, établir la relation

$$\mathbb{D}^{-1} = \left(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right)^{-1} - \imath\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right)^{-1}.$$

Exercice 7

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure.

Q. 1 *A quelle(s) condition(s) la matrice* $\mathbb{L}$ *est-elle inversible?* ▪

On suppose $\mathbb{L}$ inversible et on note $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$.

Q. 2 *Montrer que* $\mathbb{M}$ *est une matrice triangulaire inférieure avec*

$$M_{i,i} = \frac{1}{L_{i,i}}, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

2 Matrices blocs

Exercice 8

On considère les matrices blocs

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Calculer les matrices* $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *et* $\mathbb{B}\mathbb{A}$ *en utilisant l'écriture bloc.* ▪

Q. 2 *Calculer les matrices* $\mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B})$ *et* $(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})$ *en fonction de la matrice* $\mathbb{C}$. ▪

Exercice 9

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{L}$ la matrice

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \mathbb{B}\mathbb{A} & \mathbb{B} \\ 2\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} & \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Q. 1 *Montrer que la matrice* $\mathbb{L}$ *est bien définie et spécifier les dimensions des blocs.* ▪

Q. 2 *Calculer* $\mathbb{L}^2$. *Que peut-on en conclure?* ▪

Exercice 10

Q. 1 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{s,s}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. *On suppose* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *inversible. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies :*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{B}^{-1} \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{-1} & -\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{B}^{-1} \\ 0 & \mathbb{B}^{-1} \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

▪

3 Pêle-Mêle

Exercice 11

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Construire une base orthonormée* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *dont le premier vecteur de base* $\boldsymbol{u}$. ▪

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$.

Q. 2 *Calculer*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

et montrer que la première colonne de $\mathbb{B}$ *est* $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$. ▪

Q. 3 *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice* $\mathbb{A}$ *s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ *est une matrice unitaire et* $\mathbb{T}$ *une matrice triangulaire supérieure.* ▪

Exercice 12

Q. 1 *Soit* $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *une matrice triangulaire supérieure. Montrer que si* $\mathbb{T}$ *est une matrice normale alors elle est diagonale.* ▪

Q. 2 *Montrer que* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *est une matrice normale si et seulement si il existe* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *unitaire et* $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *diagonale telle que* $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. ▪

Q. 3 *En déduire qu'une matrice normale est diagonalisable et que ses vecteurs propres sont orthogonaux.* ▪

Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.* ∎

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

1. *Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{13.1}$$

   et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{13.2}$$

2. *En déduire que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle. \tag{13.3}$$

∎

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.* ∎

Q. 4 *Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbb{B}) < 1$ alors $\mathbb{A}$ est définie positive.* ∎

Exercice 14

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne

Q. 1 *Montrer que*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \in \mathbb{R},\ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n. \tag{14.1}$$

∎

On suppose de plus que la matrice $\mathbb{A}$ est définie positve.

Q. 2 1. *Montrer que les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont strictement positifs.*

2. *Montrer que les sous matrices principales de $\mathbb{A}$ sont elles aussi hermitiennes et définies positves.* ∎

Exercice 15

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que* ***(théorème de Gerschgorin-Hadamard)*** *:*

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbb{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \tag{15.1}$$

∎

Q. 2 *Montrer que, si la matrice $\mathbb{A}$ est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.* ∎

On suppose que $\mathbb{A}$ est à diagonale strictement dominante et on pose $\alpha_i = |a_{ii}| - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, et $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Q. 3 1. *Montrer que la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}$ est bien définie et qu'elle est à diagonale strictement dominante.*

2. *Montrer que $|\det(\mathbb{B})| \geqslant 1$.*

3. *En déduire une minoration de $|\det(\mathbb{A})|$.* ∎