**L3-Math** **Analyse Numérique**
**Institut Galilée** **Année 2012-2013**

# Travaux dirigés - 2

## Exercice 1

Soient $\mathbb{D}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ trois matrices de $\mathcal{M}_n$ respectivement matrice diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. On les suppose inversibles. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné.

**Q. 1** *Expliquer comment résoudre* $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▪

**Q. 2** *Expliquer comment résoudre* $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▪

**Q. 3** *Expliquer comment résoudre* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▪

**Q. 4** *Soit* $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. *Expliquer comment résoudre* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▪

## Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a}_k$ le $k$-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$. On suppose que les vecteurs colonne de $\mathbb{A}$ sont linéairement indépendants.

**Q. 1** *Donner une relation entre* $m$ *et* $n$. *Calculer* $\operatorname{rang}(\mathbb{A})$. ▪

**Q. 2** *Construire une famille orthonormale* $(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ *avec* $\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\nu_1}$ *et* $\nu_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|$. ▪

**Q. 3** *Exprimer les vecteurs* $\boldsymbol{a}_k$ *en fonction des* $\boldsymbol{q}_k$ *et* $\nu_k$. ▪

**Q. 4** *En déduire que l'on peut écrire* $\mathbb{A}$ *sous la forme* $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ *où la matrice* $\mathbb{Q}$ *vérifie* $\mathbb{Q}^*\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ *et la matrice* $\mathbb{R}$ *est triangulaire supérieure. On précisera les dimensions des matrices.* ▪

**Q. 5** *On suppose de plus que* $m = n$. *Expliquer comment résoudre le système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

## Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, définie positive. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (nécessairement réelles et strictement positive) rangées par ordre croissant.
On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leqslant \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n. \tag{3.1}$$

**Q. 1** *Montrer que*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant \|\boldsymbol{x}\|^4, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{3.2}$$

▪

Soit $\mathbb{P} = (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda_n \mathbb{I})\mathbb{A}^{-1}$, où $\mathbb{I}$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Q. 2** *1. Etudier le signe de* $\langle \mathbb{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ *pour tout* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$.

*2. En déduire que, pour tout* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \lambda_1 \lambda_n \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \leqslant (\lambda_1 + \lambda_n) \|\boldsymbol{x}\|^2. \tag{3.3}$$

▪

**Q. 3** *Etablir l'**inégalité de Kantorovich** :*

$$\|\boldsymbol{x}\|^4 \leqslant \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} \|\boldsymbol{x}\|^4, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{3.4}$$

▪

**Q. 4** *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$.*

1. *Montrer que*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{-1} \geqslant 0 \tag{3.5}$$
2. *On pose $\mu = \lambda_1 + \lambda_n - \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$, Montrer que $\mu > 0$.*
3. *Etablir, à partir de (3.3), l'inégalité :*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{-1} \leqslant \lambda_1 + \lambda_n - \frac{\mu^2 + \lambda_1\lambda_n}{\mu}. \tag{3.6}$$
4. *En déduire*
$$0 \leqslant \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle^{-1} \leqslant \left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}\right)^2. \tag{3.7}$$

■

## Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le **quotient de Rayleigh** de la matrice $\mathbb{A}$ :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \rho_{\mathbb{A}} & : & \mathbb{C}^n \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \boldsymbol{v} & \longmapsto & \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\langle \mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \end{array} \right. .$$

**Q. 1** *Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, calculer $\rho_{\mathbb{A}}(\alpha\boldsymbol{v})$.* ■

On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne, de valeurs propres

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n,$$

les vecteurs propres associés $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ vérifiant

$$\langle \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j\rangle = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $V_k$ le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les vecteurs $\boldsymbol{p}_i$, $i \in [\![1,k]\!]$, et on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension $k$ de $\mathbb{C}^n$. On pose par ailleurs : $V_0 = \{0\}$ et $\mathcal{V}_0 = V_0$.

**Q. 2** *Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ admettent les caractérisations suivantes, pour $k \in [\![1,n]\!]$ :*

$$\lambda_k = \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{p}_k), \tag{4.1}$$
$$\lambda_k = \max_{\substack{v \in V_k \\ v \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}), \tag{4.2}$$
$$\lambda_k = \min_{\substack{v \perp V_{k-1} \\ v \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}), \tag{4.3}$$
$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{v \in W \\ v \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}), \tag{4.4}$$
$$\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{\substack{v \perp W \\ v \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}). \tag{4.5}$$

■

**Q. 3** *Montrer que*
$$\{\rho_{\mathbb{A}}(\boldsymbol{v}) \ ; \ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

■