TRAVAUX DIRIGÉS - 3

1 Normes vectorielles et matricielles

EXERCICE 1

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$.* ▪

Q. 2 *En calculant $\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{1.1}$$

▪

Q. 3 *Soit $\boldsymbol{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (1.1) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.* ▪

EXERCICE 2

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Démontrer l'**inégalité triangulaire***

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{2.1}$$

▪

Q. 2 *Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont non nuls, prouver que l'inégalité (2.1) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ avec α un réel strictement positif.* ▪

Q. 3 *Déduire de (2.1) l'inégalité suivante :*

$$|\,\|\boldsymbol{x}\|_2 - \|\boldsymbol{y}\|_2\,| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 . \tag{2.2}$$

▪

Q. 4 *Soient $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$, p vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Montrer que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{x}_i \right\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|\boldsymbol{x}_i\|_2 . \tag{2.3}$$

▪

EXERCICE 3

Q. 1 *Soit la fonction $f(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ on a*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta. \tag{3.1}$$

▪

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 *On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ et $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalite (3.1), montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q = 1. \tag{3.2}$$

▪

Q. 3 *En déduire alors l'inégalité de Hölder*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{3.3}$$

■

Exercice 4

Soit $p > 1$ et q le nombre tel que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

Q. 1 *Vérifier que* $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ *on a*

$$|\alpha + \beta|^p \leqslant |\alpha||\alpha + \beta|^{p/q} + |\beta||\alpha + \beta|^{p/q}. \tag{4.1}$$

■

Q. 2 *En utilisant l'inégalité de Hölder et (4.2), démontrer l'**inégalité de Minkowski** :*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p , \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n, \ p \geqslant 1. \tag{4.2}$$

■

Exercice 5

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'application $\|\bullet\|_F$ par

$$\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2. \tag{5.1}$$

Q. 1 *On note, respectivement,* $\boldsymbol{A}_{i\star}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ *et* $\boldsymbol{A}_{\star j}$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$ *les vecteurs lignes et colonnes de* $\mathbb{A}$. *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{A}_{i\star}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{A}_{\star j}\|_2^2 = \operatorname{tr} \mathbb{A}^* \mathbb{A}. \tag{5.2}$$

■

Q. 2 *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_F \|\boldsymbol{x}\|_2 , \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{5.3}$$

■

Q. 3 *Montrer que cette application est une norme matricielle (nommée norme de Frobenius).* ■

Q. 4 *Calculer* $\|\mathbb{A}^*\|_F$ *et* $\|\mathbb{I}_n\|_F$ *où* $\mathbb{I}_n$ *est la matrice identitée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ■

Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Montrer les propriétés suivantes

1. $\|\mathbb{A}\|_2 = \max\limits_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1 \\ \|\boldsymbol{y}\|_2 = 1}} |\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|$.
2. $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}^*\|_2$.
3. $\|\mathbb{A}^*\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2^2$.
4. $\|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{V}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$ quand $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{V}\mathbb{V}^* = \mathbb{I}$

Exercice 7

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ et $p \geqslant 1$. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_p \leqslant \|\mathbb{A}\|_p \|\boldsymbol{x}\|_p \tag{7.1}$$
$$\|\mathbb{A}\|_p = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_p=1} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_p \tag{7.2}$$
$$\|\mathbb{A}\|_p = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_p\leqslant 1} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_p \tag{7.3}$$
$$\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_p \leqslant \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbb{B}\|_p \tag{7.4}$$

2 Conditionnement

Exercice 8

Soit le système linéaire définie par $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ définie par :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Q. 1 *Trouver la solution $\boldsymbol{x}$ de ce système.* ▪

Q. 2 *On pose* $\Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. *Déterminer la solution $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ du système*

$$(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

Q. 3 *Vérifier l'inégalité*

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}\|_p} \leqslant \operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|_p}{\|\mathbb{A}\|_p} \tag{8.1}$$

pour $p = 1, 2, \infty$. ▪

Exercice 9

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{ii} = 1$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i+1} = 2$, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, et $a_{ij} = 0$ sinon.

Q. 1 *Montrer que* $\operatorname{cond}_2(\mathbb{A}) \geqslant 2^n$. ▪

Indication : utiliser le vecteur $\boldsymbol{e}_n$ de la base canonique pour montrer que $\|\mathbb{A}\|_2 \geqslant 2$ et $\|\mathbb{A}^{-1}\|_2 \geqslant 2^{n-1}$.

Exercice 10

Soit $\mathbb{A}_n(\varepsilon) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{A}_n(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Calculer les valeurs propres de $\mathbb{A}_n(0)$ et $\mathbb{A}_n(\varepsilon)$.* ▪

Q. 2 *Appliquer les résultats à $n = 40$ et $\varepsilon = 10^{-40}$. Conclure.* ▪