

TRAVAUX DIRIGÉS - 5

**EXERCICE 1**

**Q. 1** Montrer que pour la matrice

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la méthode de Jacobi converge, tandis que la méthode de Gauss-Seidel diverge. ■

**Q. 2** Montrer que pour la matrice

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la méthode de Jacobi diverge, tandis que la méthode de Gauss-Seidel converge. ■

**EXERCICE 2**

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive décomposée (par points) sous la forme  $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$  où  $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ ,  $\mathbb{E}$  est triangulaire inférieure et d'éléments nuls sur la diagonale et  $\mathbb{F}$  est triangulaire supérieure et d'éléments nuls sur la diagonale.

On étudie une méthode itérative de résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Soit  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , on définit la suite  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \tag{2.1}$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{E}\mathbf{x}_{k+1/2} + \mathbf{b} \tag{2.2}$$

**Q. 1** Ecrire le vecteur  $\mathbf{x}_{k+1}$  sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{c} \tag{2.3}$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{B}$  et le vecteur  $\mathbf{c}$ . ■

**Q. 2** 1. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \tag{2.4}$$

2. Soit  $(\lambda, \mathbf{p})$  un élément propre de la matrice  $\mathbb{B}$ . Montrer que

$$\lambda \mathbb{A}\mathbf{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = 0. \tag{2.5}$$

**Q. 3** En déduire la convergence de cette méthode. ■

**Q. 4** Etendre ces résultats au cas d'une décomposition  $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$  par blocs. ■

**EXERCICE 3**

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice  $n \times n$  réelle symétrique et définie positive. On s'intéresse à la résolution du problème

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.1}$$

On introduit la décomposition  $\mathbb{A} = \mathbb{D} + \mathbb{H} + \mathbb{V}$ , où  $\mathbb{D} = \alpha\mathbb{I}$ ,  $\alpha > 0$  et  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{V}$  sont deux matrices symétriques, telles que les matrices  $\mathbb{D} + \mathbb{H}$  et  $\mathbb{D} + \mathbb{V}$  soient inversibles. On considère la méthode itérative :

$$(\mathbb{D} + \mathbb{H})\mathbf{x}^{[k+\frac{1}{2}]} = -\mathbb{V}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}, \tag{3.2}$$

$$(\mathbb{D} + \mathbb{V})\mathbf{x}^{[k+1]} = -\mathbb{H}\mathbf{x}^{[k+\frac{1}{2}]} + \mathbf{b}. \tag{3.3}$$

**Q. 1** Exprimer  $\mathbf{x}^{[k+1]}$  en fonction de  $\mathbf{x}^{[k]}$ . En déduire que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{x}$ , si et seulement si :

$$\rho\left((\mathbb{D} + \mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D} + \mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) < 1.$$

**Q. 2** 1. Posons  $\mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{V}$ . Vérifier que

$$\rho\left((\mathbb{D} + \mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D} + \mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) = \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C})^{-1}\right).$$

2. Montrer que les matrices  $\mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}$  et  $\mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C})^{-1}$  sont symétriques.

3. En déduire que :

$$\rho\left((\mathbb{D} + \mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D} + \mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) \leq \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right) \rho\left(\mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C})^{-1}\right).$$

**Q. 3** 1. Montrer que

$$\rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right) < 1 \iff \max_{\mu \in \text{Sp}(\mathbb{B})} \left| \frac{\mu}{1 + \mu} \right| < 1. \quad (3.4)$$

2. En déduire que

$$\rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right) < 1 \iff \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{B} \text{ est définie positive.}$$

3. En déduire que la méthode itérative (3.2)-(3.3) converge dès que les matrices  $\frac{1}{2}\mathbb{D} + \mathbb{H}$  et  $\frac{1}{2}\mathbb{D} + \mathbb{V}$  sont définies positives. ■

On va maintenant étudier une généralisation de (3.2)-(3.3). On décompose la matrice  $\mathbb{A}$  sous les formes  $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$  et  $\mathbb{A} = \mathbb{P} - \mathbb{Q}$ , où les matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{P}$  sont inversibles. On considère la méthode itérative :

$$\mathbb{M}\mathbf{x}^{[k+\frac{1}{2}]} = \mathbb{N}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{P}\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{Q}\mathbf{x}^{[k+\frac{1}{2}]} + \mathbf{b}. \quad (3.6)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{[k]} &= \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}, & \boldsymbol{\eta}^{[k]} &= \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{e}^{[k]} \\ \mathbf{e}^{[k+\frac{1}{2}]} &= \mathbf{x}^{[k+\frac{1}{2}]} - \mathbf{x}, & \boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]} &= \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{e}^{[k+\frac{1}{2}]} \end{aligned}$$

On note  $\|\bullet\|_{\mathbb{A}}^2$  la norme définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{A}}^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

**Q. 4** 1. Vérifier que  $\boldsymbol{\eta}^{[k]} = \mathbf{e}^{[k]} - \mathbf{e}^{[k+\frac{1}{2}]}$ .

2. En déduire

$$\left\| \mathbf{e}^{[k+\frac{1}{2}]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\| \mathbf{e}^{[k]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 = - \left\langle (\mathbb{M}^t + \mathbb{N})\boldsymbol{\eta}^{[k]}, \boldsymbol{\eta}^{[k]} \right\rangle \quad (3.7)$$

3. Vérifier que  $\boldsymbol{\eta}^{[k+1/2]} = \mathbf{e}^{[k+1/2]} - \mathbf{e}^{[k+1]}$ .

4. En déduire

$$\left\| \mathbf{e}^{[k+1]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\| \mathbf{e}^{[k+\frac{1}{2}]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 = - \left\langle (\mathbb{P}^t + \mathbb{Q})\boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]}, \boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]} \right\rangle. \quad (3.8)$$

**Q. 5** 1. Montrer que les matrices  $\mathbb{M}^t + \mathbb{N}$  et  $\mathbb{P}^t + \mathbb{Q}$  sont symétriques.

2. Montrer que si les matrices  $\mathbb{M} + \mathbb{N}^t$  et  $\mathbb{P} + \mathbb{Q}^t$  sont définies positives, la méthode (3.5)-(3.6) converge vers  $\mathbf{x}$  solution de (3.1). On pourra pour cela montrer que  $\left\| \mathbf{e}^{[k]} \right\|_{\mathbb{A}}^2$  est une suite convergente, puis utiliser le fait que

$$\left\| \mathbf{e}^{[k+1]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\| \mathbf{e}^{[k]} \right\|_{\mathbb{A}}^2 \rightarrow 0.$$