$$\begin{cases} (\mathbb{D}+\mathbb{H})x^{k+1/2} = -\mathbb{V}x^{k} + b & (1) \\ (\mathbb{D}+\mathbb{V})x^{k+1} = -\mathbb{H}x^{k+1/2} + b & (2) \end{cases}$$

$\mathbb{D}+\mathbb{V}$ inversible donc

$$(2) \Leftrightarrow x^{k+1} = -(\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}x^{k+1/2} + (\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}b$$

$\mathbb{D}+\mathbb{H}$ inversible donc

$$(1) \Leftrightarrow x^{k+1/2} = -(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}x^{(k)} + (\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}b$$

Q1/ On obtient alors

$$x^{k+1} = +(\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}x^{(k)} - (\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}b + (\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}b$$
$$= \mathbb{E}x^{k} + d$$

La suite x^k converge donc ssi $\rho(\mathbb{E}) < 1$

Q2 1/ On pose $\mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{H}$ et $\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{V}$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= (\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V} \\ &= (\mathbb{D}(\mathbb{I}+\mathbb{D}^{-1}\mathbb{V}))^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}(\mathbb{I}+\mathbb{D}^{-1}\mathbb{H}))^{-1}\mathbb{V} \quad \text{car } \mathbb{D} \text{ inversible} \\ &= (\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{V} \\ &= (\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C} \\ &= (\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{C})\end{aligned}$$

<u>remarque</u> : $\mathbb{I}+\mathbb{B}$ inversible car $\mathbb{D}+\mathbb{H}$ inversible et $\mathbb{D}$ inversible $\Rightarrow \underbrace{\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}+\mathbb{H})}_{=\mathbb{I}+\mathbb{B}}$ inversible

La matrice $\mathbb{E}$ est donc semblable à la matrice $\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}$

d'où $\rho(\mathbb{E}) = \rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1})$ on pose $\mathbb{F} = \mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}$

Q2 2/ La matrice $\mathbb{B}$ est symétrique ~~car~~ :

$$\mathbb{B}^t = (\mathbb{D}^{-1}\mathbb{H})^t = \mathbb{H}^t(\mathbb{D}^{-1})^t = \mathbb{H}\mathbb{D}^{-1}$$

car $\mathbb{H}$ symétrique, $\mathbb{D}$ symétrique inversible $\Rightarrow \mathbb{D}^{-1}$ symétrique

$$= \mathbb{H}(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}) = (\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I})\mathbb{H} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{H} \quad (\text{i.e } \mathbb{H} \text{ et } \mathbb{D}^{-1} \text{ commutent})$$
$$= \mathbb{B}$$

La matrice $\mathbb{C}$ est symétrique par le même raisonnement.

~~$(\mathbb{I}+\mathbb{B})$~~ ~~sont~~ donc symétrique
$(\mathbb{I}+\mathbb{C})$

$\mathbb{B}$ symétrique $\Rightarrow$ $\mathbb{I}+\mathbb{B}$ symétrique

De plus

$$\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B}) = (\mathbb{I}+\mathbb{B})\mathbb{B}$$

D'où, en multipliant à gauche et à droite par $(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$

$$(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$$ donc $(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ et $\mathbb{B}$ commutent

On a alors

$$\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right)^t = \left((\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right)^t \mathbb{B}^t = \left((\mathbb{I}+\mathbb{B})^t\right)^{-1} \mathbb{B}^t$$

$$= (\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{B}$$ car $\mathbb{I}+\mathbb{B}$ symétrique et $\mathbb{B}$ symétrique

$$= \mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$$ car $(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ et $\mathbb{B}$ commutent

Donc $\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ est symétrique.

Par le même raisonnement, $\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}$ est symétrique.

Q_2 3) On a (théorème 3.3)

$$\rho(\mathbb{E}) = \rho(\mathbb{F}) \leqslant \|\mathbb{F}\|_2 = \|\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}^{-1})\|_2 \leqslant \|\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\|_2 \, \|\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}^{-1}\|_2$$

par déf. de la norme matricielle.

Comme pour toute matrice normale $\mathbb{A}$, $\rho(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_2$ (théorème 3.2 eq. (3.12))

et, que $\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ et $\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}$ symétriques (donc normales), on obtient

$$\rho(\mathbb{E}) \leqslant \rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1})\, \rho(\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1})$$

Q_3 1) Soit (λ, u) un élément propre de $\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$. On a donc

$$\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1} u = \lambda u$$

On pose $v = (\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1} u \neq 0$ car $u \neq 0$ (et $(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ inversible !)

et on obtient

$$\mathbb{B} v = \lambda (\mathbb{I}+\mathbb{B}) v$$

c'est à dire

$$(1-\lambda)\mathbb{B} v = \lambda v .$$

or $\lambda \neq 1$ (car sinon $v = 0$ et donc $u = 0$)

Donc, on a

$$\mathbb{B} v = \frac{\lambda}{1-\lambda} v$$

et

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} \in \sigma(\mathbb{B})$$

On a démontré que

$$\lambda \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1 \text{ et} \\ \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \in \sigma(\mathbb{B}) \end{cases}$$

Réciproquement, soit (μ, v) un élément propre de $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} v = \mu v$$

~~On pose~~ $\cancel{u = (\mathbb{I}+\mathbb{B}) v}$ ~~et donc~~ $\cancel{v = (\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1} u}$ ~~car~~ $\cancel{\mathbb{I}+\mathbb{B}}$ ~~inversible~~

~~On a alors~~

$$\cancel{\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1} u = \mu}$$

$$\mathbb{B} v = \mu v \Rightarrow (\mathbb{I}+\mathbb{B}) v = (\mu + 1) v$$

Comme $\mathbb{I}+\mathbb{B}$ inversible, on a $\mu \neq -1$ (car sinon $(\mathbb{I}+\mathbb{B})v = 0 \Rightarrow v = 0$ contradiction ! $v \neq 0$)

On obtient alors

$$(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1} v = \frac{1}{\mu+1} v$$

et donc

$$\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}v = \frac{1}{\mu+1}\mathbb{B}v = \frac{\mu}{\mu+1}v$$

C'est à dire $\dfrac{\mu}{\mu+1} \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1})$

On a démontré que

$$\mu \in \sigma(\mathbb{B}) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \neq -1 \\ \text{et} \\ \dfrac{\mu}{\mu+1} \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) \end{cases}$$

~~On a donc l'équivalence~~

$$\cancel{\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \forall \mu \in \sigma(\mathbb{B}) \left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| < 1}$$

Montrons que

$$\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \max_{\mu \in \sigma(\mathbb{B})} \left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| < 1$$

$(\Rightarrow)$ On a $\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1$, c'est à dire

$$\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) \quad |\lambda| < 1$$

Or $\forall \mu \in \sigma(\mathbb{B})$, on a $\underset{(\mu \neq -1)}{}$ $\dfrac{\mu}{\mu+1} \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1})$ d'où

$$\left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| < 1 \quad \forall \mu \in \sigma(\mathbb{B})$$

$(\Leftarrow)$ On a $\max_{\mu \in \sigma(\mathbb{B})} \left|\dfrac{\mu}{\mu+1}\right| < 1$, c'est à dire

$$\forall \mu \in \sigma(\mathbb{B}) \quad \left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| < 1$$

Or $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1})$, on a $\underset{(\lambda \neq 1)}{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}} \in \sigma(\mathbb{B})$ d'où

$$\left|\frac{\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}{\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)+1}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{1}{\frac{\lambda+1-\lambda}{1-\lambda}}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| < 1$$

Q3 2) D'après (3)

$$\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1 \iff \forall \mu \in \sigma(\mathbb{B}) \quad \left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| < 1$$

$$\iff -1 < \frac{\mu}{\mu+1} < 1 \quad \text{car } \mathbb{B} \text{ symétrique et donc } \sigma(\mathbb{B}) \subset \mathbb{R}$$

$$\iff -(\mu+1) < \mu < \mu+1$$

$$\iff 0 < 2\mu+1 \; (< 2\mu+2)$$

La matrice $\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B}$ est symétrique

Rappel: Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors

$\mathbb{A}$ définie positive $\iff \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Preuve: Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$

$(\Rightarrow)$ Soit (λ, u) un élément propre de $\mathbb{A}$.

Comme $\mathbb{A}$ déf. positive, on a

$$<\mathbb{A}u, u> \; > 0 \quad \text{car } u \neq 0$$

c'est à dire

$$<\lambda u, u> \; > 0 \iff \bar{\lambda} <u,u> \; > 0 \qquad \bar{\lambda} = \lambda \text{ car } \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$$

$$\iff \lambda > 0.$$

$(\Leftarrow)$ Comme $\mathbb{A}$ hermitienne (donc normale), $\exists \mathbb{U}$ unitaire et $\exists \mathbb{D}$ diagonale tq $\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U}$ et la diagonale de $\mathbb{D}$ est constituée des valeurs propres de $\mathbb{A}$. (voir exo)

On a donc, $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$<\mathbb{A}x, x> = <\mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U}x, x> = <\mathbb{D}\mathbb{U}x, \mathbb{U}x>$$

or $y = \mathbb{U}x \neq 0$ car $x \neq 0$ et $\mathbb{U}$ unitaire (donc inversible)

ce qui donne

$$<\mathbb{A}x, x> = <\mathbb{D}y, y> = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} |y_i|^2 \qquad \text{car } \overline{d_{ii}} = d_{ii} \text{ (valeurs propres réelles)}$$

Comme $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}^{+*}$, on obtient que $\forall i \in [\![1,n]\!] \; d_{ii} > 0$

Or $y \neq 0$ et donc

$$<\mathbb{A}x, x> \; > 0. \qquad \text{CQFD.}$$

On a

$$\sigma\left(\tfrac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B}\right) = \left\{ \tfrac{1}{2}+\mu, \; \forall \mu \in \sigma(\mathbb{B}) \right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$$

(u vect. propr. $\mu \in \sigma(\mathbb{B}) \iff \mathbb{B}u = \mu u \iff (\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B})u = (\frac{1}{2}+\mu)u$

Donc $\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1 \iff \frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B}$ définie positive (elle est déjà symétrique)

Q_3 3) D'après la question 1 on a convergence ssi

$$\rho(\mathbb{E}) = \rho\left((\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) < 1$$

or $$\rho(\mathbb{E}) \underset{Q_1.1}{=} \rho(\mathbb{F}) = \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\right) \leq \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right)\rho\left(\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\right)$$

Donc si $\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1$ et si $\rho(\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}) < 1$ la suite est convergente.

~~Com~~
On a vu que

$$\rho(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B} \text{ déf. positive}$$

De même ~~$\mathbb{C}$ était symétrique~~, $\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{C}$ était symétrique, on a

$$\rho(\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{C} \text{ déf. positive}$$

Or

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B} = \frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{D}^{-1}\mathbb{H} = \mathbb{D}^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{H}\right)$$

Comme $\mathbb{D} = \alpha\mathbb{I}, \alpha>0$, $\mathbb{D}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{I}$ et donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{H}\right)$$

D'où

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B} \text{ définie positive} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{H} \text{ définie positive} \quad (\text{car } \alpha>0)$$

De m̂

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{C} \text{ définie positive} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{V} \text{ définie positive}$$

D'où le résultat.

Q4) 1) On a $Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx+b$

On a

$$e^{k+1/2} = x^{k+1/2} - x = M^{-1}(Nx^k+b) - M^{-1}(Nx+b)$$
$$= M^{-1}N(x^k - x) = M^{-1}Ne^k$$

On obtient donc

$$-e^{k+1/2} + e^k = (-M^{-1}N + I)e^k$$
$$= M^{-1}(M-N)e^k$$
$$= M^{-1}Ae^k$$
$$= \eta^k$$

2) Montrons que

$$\|e^{k+1/2}\|_A^2 - \|e^k\|_A^2 = -\langle (M^t+N)\eta^k, \eta^k\rangle$$

En effet

$$\|e^{k+1/2}\|_A^2 - \|e^k\|_A^2 = \langle Ae^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle - \langle Ae^k, e^k\rangle$$

or $e^{k+1/2} = e^k - \eta^k$ d'où

$$\beta = \|e^{k+1/2}\|_A^2 - \|e^k\|_A^2 = \langle A(e^k-\eta^k), e^k-\eta^k\rangle - \langle Ae^k, e^k\rangle$$
$$= \cancel{\langle Ae^k, e^k\rangle} - \langle A\eta^k, e^k\rangle - \langle Ae^k, \eta^k\rangle + \langle A\eta^k, \eta^k\rangle - \cancel{\langle Ae^k, e^k\rangle}$$
$$= \langle A\eta^k, \eta^k\rangle - 2\langle Ae^k, \eta^k\rangle \quad \text{car } A \text{ symétrique}$$

On a $\eta^k = M^{-1}Ae^k$ d'où $M\eta^k = Ae^k$ et

$$\beta = \langle A\eta^k, \eta^k\rangle - 2\langle M\eta^k, \eta^k\rangle = \langle (M-N)\eta^k, \eta^k\rangle - \langle 2M\eta^k, \eta^k\rangle$$
$$\cancel{= \langle (A-2M)\eta^k, \eta^k\rangle = -\langle (M^t+N)\eta^k, \eta^k\rangle}$$
$$= -\langle M\eta^k, \eta^k\rangle - \langle N\eta^k, \eta^k\rangle$$

Or $\langle M\eta^k, \eta^k\rangle = \overline{\langle \eta^k, M\eta^k\rangle} \underset{\text{dans le corps des réels}}{=} \langle \eta^k, M\eta^k\rangle = \langle M^t\eta^k, \eta^k\rangle$

D'où

$$\beta = \|e^{k+1/2}\|_A^2 - \|e^k\|_A^2 = -\langle (M^t+N)\eta^k, \eta^k\rangle$$

Q4 3) On a

$$\mathbb{A}x = b \Leftrightarrow (\mathbb{P}-\mathbb{Q})x = b \Leftrightarrow \mathbb{P}x = \mathbb{Q}x+b \Leftrightarrow x = \mathbb{P}^{-1}(\mathbb{Q}x+b)$$

et

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x = \mathbb{P}^{-1}(\mathbb{Q}x^{k+1/2}+b) - \mathbb{P}^{-1}(\mathbb{Q}x+b)$$
$$= \mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q}\,(x^{k+1/2}-x) = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q}e^{k+1/2}$$

On obtient donc

$$e^{k+1/2} - e^{k+1} = e^{k+1/2} - \mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q}e^{k+1/2} = (I-\mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q})e^{k+1/2} = \mathbb{P}^{-1}(\mathbb{P}-\mathbb{Q})e^{k+1/2}$$
$$= \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}e^{k+1/2} = \eta^{k+1/2}$$

Q4 4)

Montrons que

$$\beta' = \|e^{k+1}\|^2_{\mathbb{A}} - \|e^{k+1/2}\|^2_{\mathbb{A}} = -\langle(\mathbb{P}^t+\mathbb{Q})\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$$

En effet

$$\beta' = \langle \mathbb{A}e^{k+1}, e^{k+1}\rangle - \langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle$$

or $e^{k+1} = e^{k+1/2} - \eta^{k+1/2}$ d'où

$$\beta' = \langle \mathbb{A}(e^{k+1/2}-\eta^{k+1/2}), e^{k+1/2}-\eta^{k+1/2}\rangle - \langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle$$
$$= \cancel{\langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle} - \langle \mathbb{A}\eta^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle - \langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle + \langle \mathbb{A}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$$
$$- \cancel{\langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, e^{k+1/2}\rangle}$$

$$= \langle \mathbb{A}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle - 2\langle \mathbb{A}e^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ symétrique}$$

On a $\eta^{k+1/2} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}e^{k+1/2}$ d'où $\mathbb{P}\eta^{k+1/2} = \mathbb{A}e^{k+1/2}$ et alors

$$\beta' = \langle \mathbb{A}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle - 2\langle \mathbb{P}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$$
$$= \langle(\mathbb{P}-\mathbb{Q})\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle - 2\langle \mathbb{P}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle = -\langle \mathbb{P}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle - \langle \mathbb{Q}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$$

Or $\langle \mathbb{P}\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle = \langle \mathbb{P}^t\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$

D'où

$$\beta' = \|e^{k+1}\|^2_{\mathbb{A}} - \|e^{k+1/2}\|^2_{\mathbb{A}} = -\langle(\mathbb{P}^t+\mathbb{Q})\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}\rangle$$

Q_5 1) Montrons que $\mathbb{M}^t + \mathbb{N}$ symétrique

$$(\mathbb{M}^t+\mathbb{N})^t = \mathbb{M} + \mathbb{N}^t = \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^t \underset{\mathbb{A} \text{ symétrique}}{=} \mathbb{A}^t + \mathbb{N} + \mathbb{N}^t = (\mathbb{A}+\mathbb{N})^t + \mathbb{N} = \mathbb{M}^t + \mathbb{N}$$

De même pour $\mathbb{P}^t + \mathbb{Q}$.

2) En sommant les equations (7) et (8), on obtient

$$\|e^{k+1}\|^2_{\mathbb{A}} - \|e^k\|^2_{\mathbb{A}} = -<(\mathbb{M}^t+\mathbb{N})\eta^k, \eta^k> - <(\mathbb{P}^t+\mathbb{Q})\eta^{k+1/2}, \eta^{k+1/2}>$$

$$\leq 0 \quad \text{car} \quad \mathbb{M}+\mathbb{N}^t = \mathbb{M}^t+\mathbb{N} \text{ définie positive et } \mathbb{P}+\mathbb{Q}^t = \mathbb{P}^t+\mathbb{Q} \text{ définie positive}$$

La suite $(\|e^k\|^2_{\mathbb{A}})_{k\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \|e^k\|^2_{\mathbb{A}}$$

D'après (7) et (8), comme $\mathbb{M}^t+\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}^t+\mathbb{Q}$ définies positives, on a

$$\|e^{k+1}\|^2_{\mathbb{A}} \leq \|e^{k+1/2}\|^2_{\mathbb{A}} \leq \|e^k\|^2_{\mathbb{A}}$$

On en déduit que la suite $(\|e^{k+1/2}\|^2_{\mathbb{A}})$ converge aussi vers ℓ.

En passant à la limite dans (7), on obtient

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \|e^{k+1/2}\|^2_{\mathbb{A}} - \|e^k\|^2_{\mathbb{A}} = \lim_{k\to+\infty} -<(\mathbb{M}^t+\mathbb{N})\eta^k, \eta^k> \qquad (12)$$

La matrice $\mathbb{M}^t+\mathbb{N}$ est symétrique (donc normale).

Rappel
Théorème Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ normale. Il existe $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$$

~~La matrice D étant~~
Les éléments diagonaux de $\mathbb{D}$ étant les valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Il existe donc $\mathbb{U}$ unitaire et $\mathbb{D}$ diagonale telles que

$$(\mathbb{M}^t+\mathbb{N}) = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$$

De plus les éléments diagonaux de $\mathbb{D}$ sont les valeurs propres de $\mathbb{M}^t+\mathbb{N}$ qui sont strictements positives car $\mathbb{M}^t+\mathbb{N}$ symétrique définie positive

On a

$$<(\mathbb{M}^t+\mathbb{N})\eta^k, \eta^k> = <\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*\eta^k, \eta^k> = <\mathbb{D}\mathbb{U}^*\eta^k, \mathbb{U}^*\eta^k>$$

On pose $z^k = \mathbb{U}^* \eta^k$. On a alors d'après (12)

$$\lim_{\ell \to +\infty} \langle (\mathbb{M}^t + \mathbb{N}) \eta^\ell, \eta^\ell \rangle = \lim_{\ell \to +\infty} \langle \mathbb{D} z^\ell, z^\ell \rangle = 0$$

Or

$$\langle \mathbb{D} z^\ell, z^\ell \rangle = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \, |z_i^\ell|^2$$

On note

$$\lambda_{min} = \min_{i \in [\![1,n]\!]} d_{ii}$$

On a $\lambda_{min} > 0$ car $d_{ii} > 0 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$ (valeurs propres de $\mathbb{M}^t + \mathbb{N}$ sdp > 0)

donc

$$\langle \mathbb{D} z^\ell, z^k \rangle \geq \lambda_{min} \sum_{i=1}^{n} |z_i^\ell|^2 = \lambda_{min} \| z^\ell \|_2^2$$

et

$$\lim_{\ell \to +\infty} \langle \mathbb{D} z^\ell, z^\ell \rangle = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \| z^k \|_2^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} z^k = 0$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire

$$\eta^k = \mathbb{U} z^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Or

$$\eta^\ell = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{A} e^\ell = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{A} (x^\ell - x)$$

et $\mathbb{M}^{-1} \mathbb{A}$ inversible d'où

$$x^{\ell+1} - x = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{M} \eta^\ell \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$