L3-Math
Institut Galilée

Analyse Numérique
Année 2012-2013

Travaux dirigés - 6

Exercice 1

Q. 1 1. *Ecrire explicitement un polynôme* $\mathcal{P}$ *de degré* 2 *passant par les points* $A = (1; 2)$, $B = (2; 6)$ *et* $C = (3; 12)$.

2. *Démontrer que le polynôme* $\mathcal{P}$ *est l'unique polynôme de degré* 2 *passant par les points* A, B *et* C. ▪

Q. 2 *Ecrire explicitement un polynôme* $\mathcal{Q}$ *de degré* 3 *tel que*

$$\mathcal{Q}(1) = 4, \qquad \mathcal{Q}(2) = 5,$$
$$\mathcal{Q}'(1) = 3, \qquad \mathcal{Q}'(2) = 2.$$ ▪

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. *Soit* $i \in [\![0, n]\!]$. *Montrer qu'il existe un unique polynôme* L_i *de degré* n *vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{2.1}$$

2. *Montrer que les* $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *forment une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *(espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* n*).* ▪

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2.2}$$

Q. 2 *Que peut-on dire du polynôme* P_n *?* ▪

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{2.3}$$

Q. 3 *Soit* $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. *On suppose que* $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_i \in [a; b]$ *et* $y_i = f(x_i)$. *Montrer que,* $\forall x \in [a; b]$, *il existe* ξ_x *appartenant au plus petit intervalle fermé contenant* $x, x_0, \ldots, x_n$ *tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{2.4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction* $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$. ▪

On cherche, par la suite, à exprimer le polynôme P_n sous une autre forme moins coûteuse en terme d'opérations.

Q. 4 *Soit* $i \in [\![0, n]\!]$.

1. *Calculer* $\pi_n'(x)$ *et en déduire* $\pi_n'(x_i)$.
2. *Calculer* $L_i(x)$ *en fonction de* $\pi_n(x)$ *et* $\pi_n'(x_i)$. ▪

Q. 5 1. *Montrer que*

$$\mathrm{P}_n(x) = \pi_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\pi_n'(x_i)}. \tag{2.5}$$

2. *Démontrer que*

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1. \tag{2.6}$$

En déduire que

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x-x_i)\pi_n'(x_i)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(x-x_i)\pi_n'(x_i)}}. \tag{2.7}$$

■

Q. 6 1. *Donner le coût de calcul de* $\mathrm{P}_n(x)$ *par (2.2).*

2. *Donner le coût de calcul de* $\mathrm{P}_n(x)$ *par (2.7).*

3. *Pour le calcul de* $\mathrm{P}_n(x)$ *avec plusieurs valeurs de* x*, peut-on améliorer son coût?* ■

Exercice 3

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels et soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{t_1 - t_0}{2}$.

Q. 1 *Expliciter un polynôme* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *de degré* 3 *tel que*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(t_0) = \mathcal{P}_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 1, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon(t_1) = \mathcal{P}_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 0. \tag{3.2}$$

■

On note $\Phi_0(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}_\varepsilon(t)$.

Q. 2 1. *Montrer que* $\Phi_0(t_0) = 1$, $\Phi_0'(t_0) = 0$, $\Phi_0(t_1) = 0$ *et* $\Phi_0'(t_1) = 0$ *(i.e.* Φ_0 *est une fonction de base des polynômes de degré* 3 *pour l'interpolation de Hermite).*

2. *Peut-on obtenir toutes les fonctions de base de Hermite par des procédés analogues. Si oui, expliquer comment!* ■

Exercice 4

Q. 1 *Construire les polynômes* h_{00}, h_{10}, h_{01} *et* h_{11} *de degré* 3 *vérifiant*

$$h_{00}(0) = 1, h_{00}'(0) = h_{00}(1) = h_{00}'(1) = 0, \tag{4.1}$$

$$h_{10}(1) = 1, h_{10}(0) = h_{00}'(0) = h_{10}'(1) = 0, \tag{4.2}$$

$$h_{01}'(0) = 1, h_{01}(0) = h_{01}(1) = h_{01}'(1) = 0, \tag{4.3}$$

$$h_{11}'(1) = 1, h_{11}(0) = h_{11}'(0) = h_{11}(1) = 0; \tag{4.4}$$

■

On pose

$$\mathrm{P}(x) = \alpha h_{00}(x) + \beta h_{10}(x) + \gamma h_{01}(x) + \delta h_{11}(x). \tag{4.5}$$

Q. 2 *Quelles sont les particularités de* P*?* ■

Soient a et b deux réels, $a < b$ et Q le polynôme de degré 3 vérifiant

$$\mathrm{Q}(a) = u_a,\ \mathrm{Q}'(a) = v_a,\ \mathrm{Q}(b) = u_b \text{ et } \mathrm{Q}'(b) = v_b.$$

Q. 3 *Exprimer le polynôme* Q *avec les fonctions* h_{00}, h_{10}, h_{01} *et* h_{11}. ■

Exercice 5

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{ß\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a,b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \;\; \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{5.1}$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de* H_n *?* ∎

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{5.2}$$

avec, pour $i \in [\![0,n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2
1. *Déterminer des conditions suffisantes sur* A_i *et* B_i *pour que* $\mathrm{P}_n \equiv \mathrm{H}_n$.
2. *En déduire les expressions de* A_i *et* B_i *en fonction de* L_i *et de* $L'_i(x_i)$ *où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus* $2n+1$ *défini par (5.1).* ∎

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

Q. 4 *Montrer que*

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\| f^{(2n+2)} \right\|_\infty}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \tag{5.3}$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.* ∎