Travaux dirigés - 7

Exercice 1

Soient $n \geqslant 3$ un entier et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = n$ une division de l'intervalle $[a, b]$. Une fonction s définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles s'appelle **spline cubique** si elle est deux fois continûment différentiable et si, sur chaque intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ et s une spline cubique vérifiant

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \ \forall i \in [\![0, N]\!]. \tag{1.1}$$

Q. 1 *Montrer que si*

$$s''(b)(f'(b) - s'(b)) = s''(a)(f'(a) - s'(a)) \tag{1.2}$$

alors

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leqslant \int_a^b (f''(x))^2 dx. \tag{1.3}$$

■

Indications : Poser $h = f - s$ et utiliser des intégrations par parties.

Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et S_k un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$\begin{cases} S_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} & (1.4a)\\ \mathrm{S}_k(x_k) &= f_k & (1.4b)\\ \mathrm{S}''_k(x_{k-1}) &= m_{k-1} & (1.4c)\\ \mathrm{S}''_k(x_k) &= m_k. & (1.4d)\end{cases}$$

Q. 2 1. *Montrer l'existence et l'unicité du polynôme* S_k *.*

2. *Montrer que polynôme* S_k *peut s'écrire sous la forme*

$$\mathrm{S}_k(x) = a_k(x_k - x)^3 + b_k(x - x_{k-1})^3 + \alpha_k(x_k - x) + \beta_k(x - x_{k-1}) \tag{1.5}$$

en explicitant les coefficients $(a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k)$ *en fonction de* $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k)$*.* ■

On note g la fonction dont la restriction à l'intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, $k \in [\![1, n]\!]$, est S_k .

Q. 3 1. *Vérifier que* g *est bien définie sur* $[a; b]$*.*

2. *Montrer que* g *est une spline cubique si et seulement si,* $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{1}{2} m_k(h_k + h_{k-1}) + \frac{h_k}{6}(m_{k+1} - m_k) - \frac{h_{k-1}}{6}(m_k - m_{k-1}) = \frac{1}{h_k}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_{k-1}}(f_k - f_{k-1}). \tag{1.6}$$

■

On suppose maintenant que les points x_k sont uniforméments distribués. On a donc $x_k = a + kh$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Q. 4 (spline cubique scellée) 1. *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que* g *soit une spline cubique et vérifie* $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, *est que le vecteur* $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \ldots, m_n)^t$ *soit solution d'un système linéaire de la forme*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

que l'on précisera.

2. *Montrer que la matrice* $\mathbb{A}$ *est symétrique définie positive. Conclure.* ■

Q. 5 (spline cubique naturelle) 1. *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que* g *soit une spline cubique et vérifie* $g''(a) = 0$, $g''(b) = 0$, *est que le vecteur* $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \ldots, m_n)^t$ *soit solution d'un système linéaire de la forme*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} \tag{1.8}$$

que l'on précisera.

2. *Montrer que la matrice $\mathbb{A}$ est inversible.* ▪

Q. 6 (spline cubique périodique) *On suppose ici que $f(a) = f(b)$.*

1. *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une spline cubique et vérifie $g'(a) = g'(b)$, $g''(a) = g''(b)$, est que le vecteur $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \ldots, m_n)^t$ soit solution d'un système linéaire de la forme*
$$\mathbb{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} \tag{1.9}$$
que l'on précisera.

2. *Montrer que la matrice $\mathbb{A}$ est inversible.* ▪

Exercice 2

On se propose de déterminer $\mathrm{P}_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où
$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i(x) \tag{2.1}$$
où les $n+1$ fonctions (v_i) sont données par
$$v_i(x) = x^i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.2}$$
Ceci revient à déterminer les réels (α_i), $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

D'autres choix de (v_i) sont possibles: fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles,...

On suppose connu les couples (x_j, y_j), $\forall j \in [\![0, N]\!]$ (données expérimentales par exemple) avec $N > n$ et on suppose les x_j distincts deux à deux. On pose
$$\rho_j = y_j - \mathrm{P}_n(x_j), \ \ \forall j \in [\![0, N]\!]. \tag{2.3}$$

On veut déterminer $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :
$$J(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=0}^{N} \rho_j^2 \ \text{ soit minimum.} \tag{2.4}$$

En considérant la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^{N+1}$, on a $J(\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{r}\|^2$ où $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

On pose $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Q. 1 1. *Montrer que les fonctions v_i, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, sont linéairement indépendantes.*

2. *Que peut-on en conclure?* ▪

Q. 2 1. *Ecrire explicitement la matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{N+1,n+1}(\mathbb{R})$ définie partir*
$$u_{j+1,i+1} = v_i(x_j), \ \ \forall (i,j) \in [\![0, N]\!] \times [\![0, n]\!].$$

2. *En déduire que $\|\boldsymbol{r}\|^2 = \langle \boldsymbol{Y} - \mathbb{U}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Y} - \mathbb{U}\boldsymbol{a} \rangle$ où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ note le produit scalaire.* ▪

Le minimum de J est caractérisé par
$$J(\boldsymbol{a}) \leqslant J(\boldsymbol{a} + \epsilon \boldsymbol{b}), \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \ \forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.5}$$

Q. 3 *1. Montrer que*

$$0 \leqslant -2\epsilon \left\langle \boldsymbol{Y} - \mathbb{U}\boldsymbol{a}, \mathbb{U}\boldsymbol{b} \right\rangle + \epsilon^2 \left\langle \mathbb{U}\boldsymbol{b}, \mathbb{U}\boldsymbol{b} \right\rangle, \ \ \forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.6}$$

2. En déduire que

$$\left\langle \boldsymbol{Y} - \mathbb{U}\boldsymbol{a}, \mathbb{U}\boldsymbol{b} \right\rangle = 0, \ \ \forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.7}$$

3. Montrer que le vecteur $\boldsymbol{a}$ *minimisant* J *vérifie le système linéaire :*

$$\mathbb{U}^t \mathbb{U}\boldsymbol{a} = \mathbb{U}^t \boldsymbol{Y}. \tag{2.8}$$

4. conclure. ■