Travaux dirigés - 8

Exercice 1

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, $x_0 \in \mathbb{R}$ et h un réel strictement positif. On note $\mathrm{D_h}$ l'opérateur défini par
$$\mathrm{D_h}\, f(x_0) = f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2). \tag{1.1}$$
Cet opérateur est appelé **opérateur de différence première centrée**.

Q. 1 *Montrer que l'opérateur* $\mathrm{D_h}$ *est linéaire.* ▪

Q. 2 *Montrer que si* $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *alors,* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0$,
$$\exists C > 0 \;\; \textit{tel que} \;\; |f'(x_0) - \frac{\mathrm{D_h}\, f(x_0)}{h}| \leqslant Ch^2, \;\; \forall h \leqslant h_0. \tag{1.2}$$
▪

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit récursivement
$$\mathrm{D_h^m}\, f = \mathrm{D_h}(\mathrm{D_h^{m-1}}\, f) \;\; \text{avec} \;\; \mathrm{D_h^0}\, f = f. \tag{1.3}$$

Q. 3 1. *Déterminer* $\mathrm{D_h^2}\, f$, $\mathrm{D_h^3}\, f$ *et* $\mathrm{D_h^4}\, f$.

2. *Montrer que ces opérateurs sont linéaires.*

3. *Montrer que si* $f \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *alors,* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0$,
$$\exists C > 0 \;\; \textit{tel que} \;\; |f^{(4)}(x_0) - \frac{\mathrm{D_h^4}\, f(x_0)}{h^4}| \leqslant Ch^2, \;\; \forall h \leqslant h_0. \tag{1.4}$$
▪

Exercice 2

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, $x_0 \in \mathbb{R}$ et h un réel strictement positif. On note $\mathrm{D_h^+}$ l'opérateur défini par
$$\mathrm{D_h^+}\, f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0). \tag{2.1}$$
Cet opérateur est appelé **opérateur de différence première progressive**.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit récursivement
$$\mathrm{D_h^{+,m}}\, f = \mathrm{D_h^+}(\mathrm{D_h^{+,m-1}}\, f) \;\; \text{avec} \;\; \mathrm{D_h^{+,0}}\, f = f. \tag{2.2}$$

Q. 1 1. *Déterminer* $\mathrm{D_h^{+,2}}\, f$ *et* $\mathrm{D_h^{+,3}}\, f$.

2. *Montrer que l'opérateur* $\mathrm{D_h^{+,m}}$ *est linéaire.* ▪

On suppose par la suite que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_0 + 2h$. Soit g la fonction définie par
$$g(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{D_h^+}\, f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\mathrm{D_h^{+,2}}\, f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$
On note r la fonction définie par $r = f - g$.

Q. 2 1. *Vérifier que* $r(x_j) = 0$, $\forall j \in [\![0, 2]\!]$.

2. *En déduire qu'il existe* $\xi_0 \in [x_0, x_1]$ *et* $\xi_1 \in [x_1, x_2]$ *tels que*
$$f'(\xi_0) = g'(\xi_0) \;\; \textit{et} \;\; f'(\xi_1) = g'(\xi_1).$$

Q. 3 1. *Montrer qu'il existe* $\eta \in [\xi_0, \xi_1]$ *tel que* $r''(\eta) = 0$.

2. En déduire que

$$r''(x) = \int_\eta^x f^{(3)}(t)dt. \tag{2.3}$$

3. Montrer que, pour tout $x \in [x_0, x_2]$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant 2h^3 \max_{t\in[x_0,x_2]} |f^{(3)}(t)|. \tag{2.4}$$

■

Q. 4 *1. A l'aide d'un développement de Taylor, montrer que pour tout $x \in [x_0, x_2]$, il existe $\xi \in [x_0, x]$ tel que*

$$f(x) = G(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 \tag{2.5}$$

où l'on explicitera le polynôme G.

2. En déduire une majoration de $|f(x) - G(x)|$. ■

Q. 5 *Comparer g et G. Conclure.* ■

EXERCICE 3

Soient $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et h un réel strictement positif. On note $\mathrm{D_h}$ l'opérateur défini par

$$\mathrm{D_h}\, f(x_0) = f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2). \tag{3.1}$$

Q. 1 *Montrer qu'il existe $\xi_+ \in [x_0, x_0 + h/2]$, $\xi_- \in [x_0 - h/2, x_0]$ tels que*

$$\frac{\mathrm{D_h}\, f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{24}h^2 + \frac{f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)}{5!2^5}h^4. \tag{3.2}$$

■

Q. 2 *1. En déduire l'expression de $f'(x_0)$ en fonction de $\mathrm{D_{h/2}}\, f(x_0)$ et $\mathrm{D_h}\, f(x_0)$ avec un reste en $O(h^4)$.*

2. Donner une majoration de

$$|f'(x_0) - \frac{8f(x_0 + h/4) - 8f(x_0 - h/4) - f(x_0 + h/2) + f(x_0 - h/2)}{3h}|.$$

EXERCICE 4

Soient $g \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$ et $t_1 < t_2 < \ldots < t_M$, M points de l'intervalle $[-1; 1]$. On note

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \ \forall i \in [\![1, M]\!].$$

Q. 1 *Montrer que les $\{L_i\}_{i\in[\![1,M]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$.*

Q. 2 *Montrer que la formule de quadrature*

$$J(g) = \sum_{i=1}^{M} w_i g(t_i)$$

est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$ si et seulement si

$$w_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt, \ \forall j \in [\![1, M]\!]. \tag{4.1}$$

■

On fixe $M = 4$. Soient $\alpha \in]0; 1[$, $t_1 = -1$, $t_2 = -\alpha$, $t_3 = \alpha$, $t_4 = 1$.

Q. 3 *Déterminer* $(w_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ *en fonction de* α *de telle sorte que*

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[X], \quad J_4(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)dt. \tag{4.2}$$

■

Q. 4 *Déterminer la valeur maximum de* $r \in \mathbb{N}$ *telle que*

$$J_4(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)dt,\ \ \forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_r[X]. \tag{4.3}$$

Expliciter les valeurs de α *et des* $(w_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$. ■