

Rappels - Algèbre linéaire

Cuvelier François

Version du 4 septembre 2012

Table des matières

1	Vecteurs	1
2	Matrices	2
2.1	Généralités	2
2.2	Matrices particulières	5
3	Normes vectorielles et normes matricielles	6
4	Réduction des matrices	8
5	Suites de vecteurs et de matrices	8

.....

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n , sur le corps \mathbb{R} des nombres réels, ou sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Notons plus généralement \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par \mathbf{v}^t et \mathbf{v}^* les **vecteurs lignes** suivants

$$\mathbf{v}^t = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n), \quad \mathbf{v}^* = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \dots \quad \bar{v}_n)$$

où $\bar{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α .

Définition 1.1 – Le vecteur ligne \mathbf{v}^t est le **vecteur transposé** du vecteur colonne \mathbf{v} .
– Le vecteur ligne \mathbf{v}^* est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne \mathbf{v} .

Définition 1.2 L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

Définition 1.3 Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- ◇ Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- ◇ Un vecteur \mathbf{v} est **orthogonal à une partie** U de V si

$$\forall \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

On note $\mathbf{v} \perp U$.

- ◇ Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Définition 1.4 Le vecteur nul est représenté par la lettre 0.

Définition 1.5 Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection sur \mathbf{u}** par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n. \quad (1.1)$$

Rappel 1.1 (Procédé de Gram-Schmidt) Soit $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de \mathbb{K}^n . On construit successivement les vecteurs \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ils forment une **base orthogonale** de \mathbb{K}^n .

En normalisant, $\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle^{1/2}}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient la **base orthonormale** $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de \mathbb{K}^n .

2 Matrices

2.1 Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée **matrice de type** (m, n) , et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans \mathbb{K} .

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Définition 2.1 La matrice nulle est représentée par la lettre 0.

Définition 2.2 ◇ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice \mathbb{A} , définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^*\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

- ◇ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice \mathbb{A} , définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^t\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^t)_{ij} = a_{ji}$.

Définition 2.3 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.1)$$

On a alors

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t \mathbb{A}^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2.3)$$

Définition 2.4 Une matrice de type (n, n) est dite **matrice carrée**, ou **matrice d'ordre n** . On note

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n,n} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

l'anneau des matrices carrées d'ordre n , à éléments dans le corps \mathbb{K} .

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Définition 2.5 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ alors les éléments $a_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $a_{ij} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Définition 2.6 On appelle **matrice identité** de \mathcal{M}_n la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note \mathbb{I} ou encore \mathbb{I}_n et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Définition 2.7 Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est **inversible** s'il existe une **unique** matrice de \mathcal{M}_n , notée \mathbb{A}^{-1} et appelée **matrice inverse** de la matrice \mathbb{A} , telle que

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} \quad (2.4)$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice \mathbb{A} est **singulière**.

Rappel 2.1 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \quad (2.7)$$

$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \quad (2.8)$$

Définition 2.8 Une matrice carrée \mathbb{A} est :

- ◇ **symétrique** si \mathbb{A} est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
- ◇ **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,
- ◇ **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,
- ◇ **orthogonale** si \mathbb{A} est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- ◇ **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Définition 2.9 Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :

- ◇ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◇ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◇ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (2.9)$$

- ◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.10)$$

Définition 2.10 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

◊ Elle est **définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (2.11)$$

◊ Elle est **semi définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (2.12)$$

Définition 2.11 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Définition 2.12 Soit \mathcal{T}_n le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation**

$$P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)}).$$

Rappel 2.2 Une matrice de permutation est orthogonale.

Définition 2.13 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. Le **déterminant** d'une matrice \mathbb{A} est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ .

Définition 2.14 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de \mathbb{A} s'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Le vecteur \mathbf{u} est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .

Le couple (λ, \mathbf{u}) est appelé **élément propre** de \mathbb{A} .

Définition 2.15 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de \mathbb{A} . Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} = \text{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \quad (2.14)$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .

Définition 2.16 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **polynôme de degré n** défini par

$$\mathcal{P}_\mathbb{A}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \quad (2.15)$$

est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice \mathbb{A} .

Rappel 2.3 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

◊ Les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_\mathbb{A}$ sont les valeurs propres de la matrice \mathbb{A} .

◊ Si la racine λ de $\mathcal{P}_\mathbb{A}$ est de multiplicité k , on dit que la valeur propre λ est de multiplicité algébrique k .

◊ La matrice \mathbb{A} possède n valeurs propres distinctes ou non.

Rappel 2.4 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de \mathbb{A} . On a

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}. \quad (2.16)$$

Définition 2.17 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les n valeurs propres de \mathbb{A} . Le **spectre** de la matrice \mathbb{A} est le sous-ensemble

$$\text{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \quad (2.17)$$

du plan complexe.

Rappel 2.5 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n$. On a les relations suivantes

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \quad (2.18)$$

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \quad (2.19)$$

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), \quad (2.20)$$

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr} \mathbb{A} + \operatorname{tr} \mathbb{B}, \quad (2.21)$$

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), \quad (2.22)$$

$$\det(\mathbb{A}^*) = \overline{\det(\mathbb{A})}. \quad (2.23)$$

Définition 2.18 Le *rayon spectral* d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max \{ |\lambda_i(\mathbb{A})| ; i \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$$

Définition 2.19 Soit X et Y deux espaces vectoriels

- ◇ On note $\operatorname{Ker}(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in X ; \mathbb{A}\mathbf{v} = 0\}$ le **noyau** de l'application linéaire $\mathbb{A} : X \rightarrow Y$.
- ◇ On note $\operatorname{Im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\mathbf{v} \in Y ; \mathbf{v} \in X\}$ l'**image** de l'application linéaire $\mathbb{A} : X \rightarrow Y$.

Définition 2.20 Le *rang* d'une matrice \mathbb{A} , noté $\operatorname{rang}(\mathbb{A})$, est défini comme le rang de l'application linéaire \mathbb{A} qui lui est associé

$$\operatorname{rang}(\mathbb{A}) = \dim(\operatorname{Im}(\mathbb{A})).$$

2.2 Matrices particulières

Définition 2.21 On appelle *sous-matrice* d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée \mathbb{A} d'ordre n , on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k .

Définition 2.22 On appelle **matrice bloc** une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N$ pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} & \cdots & \mathbb{A}_{1,n} \\ \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{A}_{n-1,n} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \mathbb{A}_{n,n-1} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice et les matrices diagonales $\mathbb{A}_{i,i}$ sont carrées.

Définition 2.23 On dit qu'une matrice carrée \mathbb{A} est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$).

Définition 2.24 On dit qu'une matrice carrée \mathbb{A} est **diagonale par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

Remarque 1

Il est possible de définir des matrices blocs non carrées.

Définition 2.25 On appelle **matrice bande** une matrice \mathbb{A} telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j-i| \leq c$. c est la **demi largeur de bande**.

Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale**. Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale**.

3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition 3.1 Une *norme* sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$,
- ◇ $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée *norme vectorielle*. On appelle *espace vectoriel normé* un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i| \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_i |v_i|.\end{aligned}$$

Théorème 3.1 Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Rappel 3.1 Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\|\mathbf{u}\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q. \quad (3.1)$$

Cette inégalité s'appelle l'*inégalité de Hölder*.

Définition 3.2 Deux *normes* $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont *équivalentes* s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{v}\|' \leq C \|\mathbf{v}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\| \leq C' \|\mathbf{v}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V. \quad (3.2)$$

Rappel 3.2 Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Définition 3.3 Une *norme matricielle* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Rappel 3.3 Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (3.3)$$

est une norme matricielle, appelée *norme matricielle subordonnée* (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \quad (3.4)$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (3.5)$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \text{ et } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (3.6)$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (3.7)$$

Théorème 3.2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (3.8)$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \quad (3.9)$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3.10)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2. \quad (3.11)$$

Par ailleurs, si la matrice \mathbb{A} est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \quad (3.12)$$

Remarque 2 1. Si une matrice \mathbb{A} est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.

2. Si une matrice \mathbb{A} est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème 3.3 1. Soit \mathbb{A} une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (3.13)$$

2. Etant donné une matrice \mathbb{A} et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (3.14)$$

Théorème 3.4 L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j) \in [1, n]^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}, \quad (3.15)$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n , est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n} \|\mathbb{A}\|_2, \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \quad (3.16)$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème 3.5 1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et \mathbb{B} une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et

$$\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

4 Réduction des matrices

Définition 4.1 Soit $A : V \rightarrow V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Relativement à une autre base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, la même application est représentée par la matrice

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} \quad (4.1)$$

où \mathbb{P} est la matrice inversible dont le j -ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur \mathbf{f}_j dans la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La matrice \mathbb{P} est appelée **matrice de passage de la base** $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ dans le base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Définition 4.2 On dit que la matrice carrée \mathbb{A} est diagonalisable s'il existe une matrice inversible \mathbb{P} telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ soit diagonale.

Rappel 4.1 On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice \mathbb{A} , et que le j -ème vecteur colonne \mathbf{p}_j de la matrice \mathbb{P} est formé des composantes, dans la même base que \mathbb{A} , d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j . On a

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \mathbb{A} \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{p}_j, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (4.3)$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 4.1 1. Etant donnée une matrice carrée \mathbb{A} , il existe une matrice **unitaire** \mathbb{U} telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit **triangulaire**.

2. Etant donnée une matrice **normale** \mathbb{A} , il existe une matrice **unitaire** \mathbb{U} telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit **diagonale**.

3. Etant donnée une matrice **symétrique** \mathbb{A} , il existe une matrice **orthogonale** \mathbb{O} telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{O}$ soit **diagonale**.

5 Suites de vecteurs et de matrices

Définition 5.1 Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite (\mathbf{v}_k) d'éléments de V converge vers un élément $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

Théorème 5.1 Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème 5.2 Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

Index

- det (\mathbb{A}), 4
- Im(\mathbb{A}), 5
- \mathbb{K} , 1
- Ker(\mathbb{A}), 5
- $\mathcal{M}_{m,n}$, 2
- rang(\mathbb{A}), 5
- $\rho(\mathbb{A})$, 5
- Sp (\mathbb{A}), 4
- tr (\mathbb{A}), 4
- \mathcal{M}_n , 3

- adjointe, 2
- application linéaire
 - image, 5
 - noyau, 5

- base, 1
- base orthogonale, 2
- base orthonormale, 2

- déterminant, 4
- demi largeur de bande, 5
- diagonale, 3
- diagonale dominante, 3
- diagonale strictement dominante, 3
- diagonalisable, 8

- élément propre, 4
- espace vectoriel normé, 6

- groupe des permutations, 4

- hermitienne, 3

- identité, 3
- image, 5
- Inégalité de Hölder, 6
- inverse, 3

- Kronecker, 2

- matrice
 - adjointe, 2
 - bande, 5
 - bloc, 5
 - carrée, 3
 - définie positive, 4
 - déterminant, 4
 - diagonale, 3
 - diagonale dominante, 3
 - diagonale par blocs, 5
 - diagonale strictement dominante, 3
 - diagonalisable, 8
 - élément propre, 4
 - hermitienne, 3
 - identité, 3
 - inverse, 3
 - matrice de passage..., 8
 - normale, 3
 - norme, 6
 - ordre d'une, 3
 - orthogonale, 3
 - pentadigonale, 5
 - permutation, 4
 - polynôme caractéristique, 4
 - rang, 5
 - rayon spectrale, 5
 - semi définie positive, 4
 - singulière, 3
 - sous matrice, 5
 - sous matrice principale, 5
 - sous-espace propre, 4
 - spectre, 4
 - symétrique, 3
 - trace, 4
 - transposée, 2
 - triangulaire, 3
 - triangulaire inférieure, 3
 - triangulaire par blocs, 5
 - triangulaire supérieure, 3
 - tridiagonale, 5
 - unitaire, 3
 - valeur propre, 4
 - vecteur propre, 4

- matrices
 - produit de, 3

- normale, 3
- norme
 - invariance par transformation unitaire, 7
 - matricielle non subordonnée, 7
 - matricielle subordonnée, 6
 - vectorielle, 6
- norme matricielle, 6
- normes
 - équivalentes, 6
- noyau, 5

- opérateur de projection, 2
- ordre, 3
- orthogonale, 3
- orthogonaux (vecteurs), 2
- orthonormal, 2

- permutations, 4
- polynôme caractéristique, 4
- produit, 3
- produit scalaire, 2

- rang, 5
- rayon spectral, 5

- singulière, 3
- sous matrice, 5
- sous matrice principale, 5

- sous-espace propre, 4
- spectre, 4
- symétrique, 3

- trace d'une matrice, 4
- transposée, 2
- triangulaire, 3
- triangulaire inférieure, 3
- triangulaire supérieure, 3

- unitaire, 3

- valeur propre, 4
- vecteur
 - adjoint, 1
 - colonne, 1
 - convergence, 8
 - ligne, 1
 - orthogonal à une partie, 2
 - transposé, 1
- vecteur propre, 4
- vecteurs
 - ensemble de vecteurs orthonormal, 2
 - orthogonaux, 2
 - produit scalaire de, 2