

TRAVAUX DIRIGÉS - 1

## 1 Remise en forme

### EXERCICE 1

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Q. 1** Calculer le déterminant de la matrice  $\mathbb{A}$ . Que peut-on en conclure? ■
- Q. 2** Calculer si possible l'inverse de la matrice  $\mathbb{A}$  en utilisant la technique de la matrice augmentée. ■

### EXERCICE 2

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  telles que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Exprimer les éléments de la matrice  $\mathbb{B}$  en fonction de ceux de la matrice  $\mathbb{A}$ .

### EXERCICE 3

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Q. 1** Montrer que

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{3.1}$$

Conclure. ■

### EXERCICE 4

- Q. 1** Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible et symétrique, montrer que  $\mathbb{A}^{-1}$  est symétrique.

- Q. 2** Soit  $\mathbb{A}$  une matrice carrée telle que  $\mathbb{I} - \mathbb{A}$  est inversible. Montrer que

$$\mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{A}.$$

- Q. 3** Soient  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  des matrices carrées inversibles de même dimension telle que  $\mathbb{A} + \mathbb{B}$  soit inversible. Montrer que

$$\mathbb{A}(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\mathbb{A} = (\mathbb{A}^{-1} + \mathbb{B}^{-1})^{-1}$$

### EXERCICE 5

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n$ . Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux matrices triangulaires inférieures de  $\mathcal{M}_n$ .

- Q. 1** 1. Que peut-on dire des matrices  $\mathbb{A}^*$  et  $(\mathbb{A}^*)^*$  ?  
2. Montrer que  $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$  est triangulaire supérieure.

3. Montrer que  $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{F}$  est triangulaire inférieure.

4. Que peut-on dire des matrices  $\mathbb{A}\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}\mathbb{A}$ ? ■

**Q. 2** 1. Calculer  $\det(\mathbb{A})$ .

2. Déterminer les valeurs propres de  $\mathbb{A}$ .

3. Que peut-on dire si les éléments diagonaux de  $\mathbb{A}$  sont tous distincts? ■

**Q. 3** Soit  $\mathbb{D}$  la matrice définie par

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $\mathbb{D}$  est-elle inversible? Si oui calculer son inverse.

2. Pour chacune des valeurs propres, déterminer l'espace propre associé.

3. La matrice  $\mathbb{D}$  est-elle diagonalisable? Justifier. ■

## EXERCICE 6

Etant donnée une matrice  $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ , on pose

$$\mathbb{D} = \mathbb{A} + \iota\mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

Sous certaines hypothèses à préciser, établir la relation

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})^{-1} - \iota\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})^{-1}.$$

## EXERCICE 7

Soit  $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice triangulaire inférieure.

**Q. 1** A quelle(s) condition(s) la matrice  $\mathbb{L}$  est-elle inversible? ■

On suppose  $\mathbb{L}$  inversible et on note  $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$ .

**Q. 2** Montrer que  $\mathbb{M}$  est une matrice triangulaire inférieure avec

$$M_{i,i} = \frac{1}{L_{i,i}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

## 2 Matrices blocs

### EXERCICE 8

On considère les matrices blocs

$$\mathbb{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{B} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Q. 1** Calculer les matrices  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  et  $\mathbb{B}\mathbb{A}$  en utilisant l'écriture bloc. ■

**Q. 2** Calculer les matrices  $\mathbb{A}(\mathbb{A} + \mathbb{B})$  et  $(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A})$  en fonction de la matrice  $\mathbb{C}$ . ■

### EXERCICE 9

Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ . On note  $\mathbb{L}$  la matrice

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \mathbb{B}\mathbb{A} & \mathbb{B} \\ 2\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} & \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

**Q. 1** Montrer que la matrice  $\mathbb{L}$  est bien définie et spécifier les dimensions des blocs. ■

**Q. 2** Calculer  $\mathbb{L}^2$ . Que peut-on en conclure? ■

### EXERCICE 10

**Q. 1** Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{s,s}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ . On suppose  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  inversible. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{B}^{-1} \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{-1} & -\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{B}^{-1} \\ 0 & \mathbb{B}^{-1} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

## 3 Pêle-Mêle

### EXERCICE 11

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice et  $(\lambda, \mathbf{u})$  un élément propre de  $\mathbb{A}$  avec  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** Construire une base orthonormée  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  dont le premier vecteur de base  $\mathbf{u}$ . ■

Notons  $\mathbb{P}$  la matrice de changement de base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dans la base  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ .

**Q. 2** Calculer

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

et montrer que la première colonne de  $\mathbb{B}$  est  $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$ . ■

**Q. 3** Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice  $\mathbb{A}$  s'écrit

$$\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$$

où  $\mathbb{U}$  est une matrice unitaire et  $\mathbb{T}$  une matrice triangulaire supérieure. ■

### EXERCICE 12

**Q. 1** Soit  $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice triangulaire supérieure. Montrer que si  $\mathbb{T}$  est une matrice normale alors elle est diagonale. ■

**Q. 2** Montrer que  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  est une matrice normale si et seulement si il existe  $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  unitaire et  $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  diagonale telle que  $\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{D} \mathbb{U}^*$ . ■

**Q. 3** En déduire qu'une matrice normale est diagonalisable et que ses vecteurs propres sont orthogonaux. ■

### EXERCICE 13

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne inversible décomposée en  $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$  où  $\mathbb{M}$  est inversible. On note  $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ .

**Q. 1** Montrer que la matrice  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est hermitienne. ▪

On suppose maintenant que  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est définie positive.

**Q. 2** Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$ .

1. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad (13.1)$$

et

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (13.2)$$

2. En déduire que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle. \quad (13.3)$$

**Q. 3** Montrer que si  $\mathbb{A}$  est définie positive alors  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ . ▪

**Q. 4** Démontrer par l'absurde que si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$  alors  $\mathbb{A}$  est définie positive. ▪

### EXERCICE 14

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne

**Q. 1** Montrer que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n. \quad (14.1)$$

On suppose de plus que la matrice  $\mathbb{A}$  est définie positive.

**Q. 2** 1. Montrer que les éléments diagonaux de  $\mathbb{A}$  sont strictement positifs.

2. Montrer que les sous matrices principales de  $\mathbb{A}$  sont elles aussi hermitiennes et définies positives. ▪

### EXERCICE 15

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q. 1** Montrer que (*théorème de Gerschgorin-Hadamard*) :

$$\text{Sp}(\mathbb{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \quad (15.1)$$

**Q. 2** Montrer que, si la matrice  $\mathbb{A}$  est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible. ▪

On suppose que  $\mathbb{A}$  est à diagonale strictement dominante et on pose  $\alpha_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et  $\mathbb{D} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Q. 3** 1. Montrer que la matrice  $\mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}$  est bien définie et qu'elle est à diagonale strictement dominante.

2. Montrer que  $|\det(\mathbb{B})| \geq 1$ .

3. En déduire une minoration de  $|\det(\mathbb{A})|$ . ▪