

TRAVAUX DIRIGÉS - 2

EXERCICE 1

Soient \mathbb{D} , \mathbb{L} et \mathbb{U} trois matrices de \mathcal{M}_n respectivement matrice diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. On les suppose inversibles. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ donné.

- Q. 1 Expliquer comment résoudre $\mathbb{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ▪
- Q. 2 Expliquer comment résoudre $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ▪
- Q. 3 Expliquer comment résoudre $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ▪
- Q. 4 Soit $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. Expliquer comment résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ▪

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. On note \mathbf{a}_k le k -ème vecteur colonne de \mathbb{A} . On suppose que les vecteurs colonne de \mathbb{A} sont linéairement indépendants.

- Q. 1 Donner une relation entre m et n . Calculer $\text{rang}(\mathbb{A})$. ▪
- Q. 2 Construire une famille orthonormale $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ avec $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\nu_1}$ et $\nu_1 = \|\mathbf{a}_1\|$. ▪
- Q. 3 Exprimer les vecteurs \mathbf{a}_k en fonction des \mathbf{q}_k et ν_k . ▪
- Q. 4 En déduire que l'on peut écrire \mathbb{A} sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ où la matrice \mathbb{Q} vérifie $\mathbb{Q}^*\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ et la matrice \mathbb{R} est triangulaire supérieure. On précisera les dimensions des matrices. ▪
- Q. 5 On suppose de plus que $m = n$. Expliquer comment résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

EXERCICE 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, définie positive. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (nécessairement réelles et strictement positive) rangées par ordre croissant. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n. \quad (3.1)$$

- Q. 1 Montrer que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq \|\mathbf{x}\|^4, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \quad (3.2)$$

Soit $\mathbb{P} = (\mathbb{A} - \lambda_1\mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda_n\mathbb{I})\mathbb{A}^{-1}$, où \mathbb{I} désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Q. 2 1. Etudier le signe de $\langle \mathbb{P}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.
- 2. En déduire que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \lambda_1\lambda_n \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq (\lambda_1 + \lambda_n) \|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.3)$$

- Q. 3 Etablir l'inégalité de Kantorovich :

$$\|\mathbf{x}\|^4 \leq \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|\mathbf{x}\|^4, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \quad (3.4)$$

Q. 4 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\| = 1$.

1. Montrer que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \geq 0 \quad (3.5)$$

2. On pose $\mu = \lambda_1 + \lambda_n - \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, Montrer que $\mu > 0$.

3. Etablir, à partir de (3.3), l'inégalité :

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \leq \lambda_1 + \lambda_n - \frac{\mu^2 + \lambda_1\lambda_n}{\mu}. \quad (3.6)$$

4. En déduire

$$0 \leq \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \leq \left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1} \right)^2. \quad (3.7)$$

■

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le **quotient de Rayleigh** de la matrice \mathbb{A} :

$$\begin{cases} \rho_{\mathbb{A}} : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{v} & \longmapsto \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{cases}.$$

Q. 1 Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, calculer $\rho_{\mathbb{A}}(\alpha\mathbf{v})$. ■

On suppose que \mathbb{A} est hermitienne, de valeurs propres

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

les vecteurs propres associés $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ vérifiant

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_k le sous-espace de \mathbb{C}^n engendré par les vecteurs \mathbf{p}_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et on note \mathcal{V}_k l'ensemble des sous-espaces de dimension k de \mathbb{C}^n . On pose par ailleurs : $V_0 = \{0\}$ et $\mathcal{V}_0 = V_0$.

Q. 2 Montrer que les valeurs propres de \mathbb{A} admettent les caractérisations suivantes, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lambda_k = \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{p}_k), \quad (4.1)$$

$$\lambda_k = \max_{\substack{\mathbf{v} \in V_k \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (4.2)$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{\mathbf{v} \perp V_{k-1} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (4.3)$$

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{\mathbf{v} \in W \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (4.4)$$

$$\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{\substack{\mathbf{v} \perp W \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}). \quad (4.5)$$

■

Q. 3 Montrer que

$$\{\rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}) ; \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

■