

TRAVAUX DIRIGÉS - 4

EXERCICE 1

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha_l \in \mathbb{K}^*$, $\forall l \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note $\mathbb{L}^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice définie par

$$\begin{cases} L_{kk}^i = 1, & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ L_{i1}^i = \alpha_i, \\ L_{kl}^i = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q. 1 Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

1. Représenter la matrice \mathbb{L}^i .
2. Calculer $\det \mathbb{L}^i$ et déterminer la matrice inverse de \mathbb{L}^i .
3. Soit $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $j \neq i$. Calculer $\mathbb{L} = \mathbb{L}^i \mathbb{L}^j$. Que peut-on dire de l'inverse de \mathbb{L} . ■

Q. 2 Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

1. Calculer la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}^i \mathbb{A}$. Quelles opérations usuelles a-t-on opéré sur la matrice \mathbb{A} ?
2. Calculer la matrice $\mathbb{B} = \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j \mathbb{A}$. Quelles opérations usuelles a-t-on opéré sur la matrice \mathbb{A} ? ■

Q. 3 Application à un système linéaire. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$. Montrer que

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j \mathbb{A}\mathbf{x} = \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j \mathbf{b}.$$

EXERCICE 2

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q. 1 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$. ■

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{1,1} \neq 0$. On note $(\mathbf{a}_1^*, \dots, \mathbf{a}_n^*)$ les vecteurs lignes de \mathbb{A} et \mathbf{A}_1 le premier vecteur colonne.

Q. 2 1. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]} \mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .

2. Expliciter la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$. ■

EXERCICE 3

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1 Définir proprement cette matrice et la représenter. ■

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $(\mathbf{a}_1^*, \dots, \mathbf{a}_n^*)$ les vecteurs lignes de \mathbb{A} et $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ les vecteurs colonnes de \mathbb{B}

Q. 2 1. Déterminer $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .

2. Déterminer $\mathbb{B} \mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de \mathbb{B} . ■

Q. 3 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$. ■

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 1. Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G}_1)| = 1$ et $\mathbb{G}_1 \mathbb{A} \mathbf{e}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1$ avec $\alpha_1 \neq 0$ et \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

2. Déterminer l'inverse de \mathbb{G}_1 . ■

Q. 2 1. Construire, par récurrence, une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G} \mathbb{A} = \mathbb{U}$ avec \mathbb{U} matrice triangulaire supérieure inversible.

2. Déterminer l'inverse de \mathbb{G} .

3. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Q. 3 Que peut-on dire si \mathbb{A} est non inversible? ■

Q. 4 On suppose que les sous-matrices principales de \mathbb{A} sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure telle que $g_{i,i} = 1, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbb{G} \mathbb{A} = \mathbb{U}$ avec \mathbb{U} matrice triangulaire supérieure inversible.

2. On note $\mathbb{L} = \mathbb{G}^{-1}$. Quelles sont les propriétés de la matrice \mathbb{L} ? (on calculera les éléments diagonaux)

3. Montrer alors que la factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L} \mathbb{U}$ est unique. ■

Indication : Utiliser les résultats des exercices 2 et 3

EXERCICE 5

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbb{L} \mathbb{U}$ où \mathbb{L} est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et \mathbb{U} une matrice triangulaire supérieure.

Q. 1 Montrer que cette factorisation est unique. ■

Q. 2 1. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients des matrices \mathbb{L} et \mathbb{U} .

2. [algo] Ecrire la fonction FACTLU permettant de calculer les matrices \mathbb{L} et \mathbb{U} de la méthode précédente. ■

On suppose, de plus, que la matrice \mathbb{A} est symétrique.

Q. 3 Montrer qu'il existe une unique factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L} \mathbb{D} \mathbb{L}^t$ où \mathbb{L} est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité (i.e. $L_{ii} = 1, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) et \mathbb{D} une matrice diagonale inversible. ■

Q. 4 Montrer qu'une matrice \mathbb{A} admet une unique factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L} \mathbb{D} \mathbb{L}^t$ où \mathbb{L} est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et \mathbb{D} une matrice diagonale telle que $D_{ii} > 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si \mathbb{A} est symétrique définie positive. ■

Q. 5 En déduire que \mathbb{A} admet l'unique factorisation de cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t$ où \mathbb{B} est une matrice triangulaire inférieure telle que $B_{ii} > 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si \mathbb{A} est symétrique définie positive. ■

Q. 6 On suppose \mathbb{A} symétrique définie positive.

1. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients de la matrice \mathbb{B} précédente.
2. **[algo]** Ecrire la fonction CHOLESKY permettant de calculer la matrice \mathbb{B} de la méthode précédente. ■

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On considère la décomposition par blocs de \mathbb{M} :

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{B}^t & \mathbb{C} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Q. 1 Montrer que la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{C} - \mathbb{B}^t\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ est symétrique définie positive. ■

On considère la décomposition de Cholesky de \mathbb{M} : $\mathbb{M} = \mathbb{R}^t\mathbb{R}$ où \mathbb{R} est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs. On écrit la décomposition de \mathbb{R} par blocs

$$\mathbb{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{12} \\ \hline 0 & \mathbb{R}_{22} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{R}_{11} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Q. 2 1. Montrer que $\mathbb{R}_{22}^t\mathbb{R}_{22} = \mathbb{E}$.

2. En déduire une autre démonstration du caractère symétrique définie positive de la matrice \mathbb{E} . ■

Q. 3 Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que

$$\inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\langle \mathbb{M}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \right)^{1/2} = \frac{1}{\|\mathbb{R}^{-1}\|_2} \leq r_{ii} \leq \|\mathbb{R}\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\langle \mathbb{M}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

Q. 4 En déduire que

$$\text{cond}_2(\mathbb{R}) \geq \max_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \frac{r_{ii}}{r_{kk}}.$$