

TRAVAUX DIRIGÉS - 6

EXERCICE 1

Q. 1 1. Ecrire explicitement un polynôme \mathcal{P} de degré 2 passant par les points $A = (1; 2)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 12)$.

2. Démontrer que le polynôme \mathcal{P} est l'unique polynôme de degré 2 passant par les points A , B et C . ■

Q. 2 Ecrire explicitement un polynôme \mathcal{Q} de degré 3 tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(1) &= 4, & \mathcal{Q}(2) &= 5, \\ \mathcal{Q}'(1) &= 3, & \mathcal{Q}'(2) &= 2. \end{aligned}$$

■

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.1)$$

2. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n). ■

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (2.2)$$

Q. 2 Que peut-on dire du polynôme P_n ? ■

Soit π_n le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (2.3)$$

Q. 3 Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \in [a; b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant x, x_0, \dots, x_n tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (2.4)$$

Indication : Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$. ■

On cherche, par la suite, à exprimer le polynôme P_n sous une autre forme moins coûteuse en terme d'opérations.

Q. 4 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Calculer $\pi_n'(x)$ et en déduire $\pi_n'(x_i)$.

2. Calculer $L_i(x)$ en fonction de $\pi_n(x)$ et $\pi_n'(x_i)$. ■

Q. 5 1. Montrer que

$$P_n(x) = \pi_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \pi_n'(x_i)}. \quad (2.5)$$

2. Démontrer que

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1. \quad (2.6)$$

En déduire que

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\pi'_n(x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{(x-x_i)\pi'_n(x_i)}}. \quad (2.7)$$

- Q. 6**
1. Donner le coût de calcul de $P_n(x)$ par (2.2).
 2. Donner le coût de calcul de $P_n(x)$ par (2.7).
 3. Pour le calcul de $P_n(x)$ avec plusieurs valeurs de x , peut-on améliorer son coût? ■

EXERCICE 3

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels et soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{t_1-t_0}{2}$.

Q. 1 Expliciter un polynôme \mathcal{P}_ε de degré 3 tel que

$$\mathcal{P}_\varepsilon(t_0) = \mathcal{P}_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 1, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon(t_1) = \mathcal{P}_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 0. \quad (3.2)$$

On note $\Phi_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varepsilon(t)$.

- Q. 2**
1. Montrer que $\Phi_0(t_0) = 1$, $\Phi'_0(t_0) = 0$, $\Phi_0(t_1) = 0$ et $\Phi'_0(t_1) = 0$ (i.e. Φ_0 est une fonction de base des polynômes de degré 3 pour l'interpolation de Hermite).
 2. Peut-on obtenir toutes les fonctions de base de Hermite par des procédés analogues. Si oui, expliquer comment! ■

EXERCICE 4

Q. 1 Construire les polynômes h_{00} , h_{10} , h_{01} et h_{11} de degré 3 vérifiant

$$h_{00}(0) = 1, h'_{00}(0) = h_{00}(1) = h'_{00}(1) = 0, \quad (4.1)$$

$$h_{10}(1) = 1, h_{10}(0) = h'_{00}(0) = h'_{10}(1) = 0, \quad (4.2)$$

$$h'_{01}(0) = 1, h_{01}(0) = h_{01}(1) = h'_{01}(1) = 0, \quad (4.3)$$

$$h'_{11}(1) = 1, h_{11}(0) = h'_{11}(0) = h_{11}(1) = 0; \quad (4.4)$$

On pose

$$P(x) = \alpha h_{00}(x) + \beta h_{10}(x) + \gamma h_{01}(x) + \delta h_{11}(x). \quad (4.5)$$

Q. 2 Quelles sont les particularités de P ? ■

Soient a et b deux réels, $a < b$ et Q le polynôme de degré 3 vérifiant

$$Q(a) = u_a, \quad Q'(a) = v_a, \quad Q(b) = u_b \quad \text{et} \quad Q'(b) = v_b.$$

Q. 3 Exprimer le polynôme Q avec les fonctions h_{00} , h_{10} , h_{01} et h_{11} . ■

EXERCICE 5

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (5.1)$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de H_n ?* ■

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (5.2)$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q. 2 1. *Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que $P_n \equiv H_n$.*

2. *En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (5.1).* ■

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \in [a, b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$.

On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2.$$

Q. 4 *Montrer que*

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty}}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \quad (5.3)$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction $F(y) = f(y) - H_n(y) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$ et appliquer le théorème de Rolle.* ■