

TRAVAUX DIRIGÉS - 7

EXERCICE 1

Soient $n \geq 3$ un entier et $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ une division de l'intervalle $[a, b]$. On note $h_k = x_{k+1} - x_k$. Une fonction s définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles s'appelle **spline cubique** si elle est deux fois continûment différentiable et si, sur chaque intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ et s une spline cubique vérifiant

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{1.1}$$

Q. 1 Montrer que si

$$s''(b)(f'(b) - s'(b)) = s''(a)(f'(a) - s'(a)) \tag{1.2}$$

alors

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx. \tag{1.3}$$

■

Indications : Poser $h = f - s$ et montrer par intégrations par parties que $\int_a^b s''(x)h''(x)dx = 0$.

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et S_k un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$\begin{cases} S_k(x_{k-1}) & = f_{k-1} & (1.4a) \\ S_k(x_k) & = f_k & (1.4b) \\ S_k''(x_{k-1}) & = m_{k-1} & (1.4c) \\ S_k''(x_k) & = m_k. & (1.4d) \end{cases}$$

Q. 2 1. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme S_k .

2. Montrer que polynôme S_k peut s'écrire sous la forme

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_{k-1})^3 + \alpha_k(x - x_k) + \beta_k(x - x_{k-1}) \tag{1.5}$$

en explicitant les coefficients $(a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k)$ en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k)$ et h_{k-1} . ■

On note g la fonction dont la restriction à chaque intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est S_k .

Q. 3 1. Vérifier que g est bien définie sur $[a; b]$.

2. Montrer que g est une spline cubique si et seulement si, $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$,

$$\frac{1}{2}m_k(h_k + h_{k-1}) + \frac{h_k}{6}(m_{k+1} - m_k) - \frac{h_{k-1}}{6}(m_k - m_{k-1}) = \frac{1}{h_k}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_{k-1}}(f_k - f_{k-1}). \tag{1.6}$$

■

On suppose maintenant que les points x_k sont uniformément distribués. On a donc $x_k = a + kh, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Q. 4 (spline cubique scellée) 1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une spline cubique et vérifie $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, est que le vecteur $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \dots, m_n)^t$ soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \tag{1.7}$$

que l'on précisera.

2. Montrer que la matrice \mathbb{A} est symétrique définie positive. Conclure. ■

Q. 5 (spline cubique naturelle) 1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une spline cubique et vérifie $g''(a) = 0$, $g''(b) = 0$, est que le vecteur $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \dots, m_n)^t$ soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \quad (1.8)$$

que l'on précisera.

2. Montrer que la matrice \mathbb{A} est inversible. ■

Q. 6 (spline cubique périodique) On suppose ici que $f(a) = f(b)$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une spline cubique et vérifie $g'(a) = g'(b)$, $g''(a) = g''(b)$, est que le vecteur $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \dots, m_n)^t$ soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \quad (1.9)$$

que l'on précisera.

2. Montrer que la matrice \mathbb{A} est inversible. ■

EXERCICE 2

On se propose de déterminer $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i(x) \quad (2.1)$$

où les $n+1$ fonctions (v_i) sont données par

$$v_i(x) = x^i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.2)$$

Ceci revient à déterminer les réels (α_i) , $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

D'autres choix de (v_i) sont possibles: fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles,...

On suppose connu les couples (x_j, y_j) , $\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ (données expérimentales par exemple) avec $N > n$ et on suppose les x_j distincts deux à deux. On pose

$$\rho_j = y_j - P_n(x_j), \quad \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (2.3)$$

On veut déterminer $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^N \rho_j^2 \text{ soit minimum.} \quad (2.4)$$

En considérant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{N+1} , on a $J(\mathbf{a}) = \|\mathbf{r}\|^2$ où $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

On pose $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Q. 1 1. Montrer que les fonctions v_i , $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sont linéairement indépendantes.

2. Que peut-on en conclure? ■

Q. 2 1. Ecrire explicitement la matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{N+1, n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$u_{j+1, i+1} = v_i(x_j), \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket.$$

2. En déduire que $\|\mathbf{r}\|^2 = \langle \mathbf{Y} - \mathbb{U}\mathbf{a}, \mathbf{Y} - \mathbb{U}\mathbf{a} \rangle$ où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ note le produit scalaire. ■

Le minimum de J est caractérisé par

$$J(\mathbf{a}) \leq J(\mathbf{a} + \epsilon \mathbf{b}), \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.5)$$

Q. 3 1. Montrer que

$$0 \leq -2\epsilon \langle \mathbf{Y} - \mathbb{U}\mathbf{a}, \mathbb{U}\mathbf{b} \rangle + \epsilon^2 \langle \mathbb{U}\mathbf{b}, \mathbb{U}\mathbf{b} \rangle, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.6)$$

2. En déduire que

$$\langle \mathbf{Y} - \mathbb{U}\mathbf{a}, \mathbb{U}\mathbf{b} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.7)$$

3. Montrer que le vecteur \mathbf{a} minimisant J vérifie le système linéaire :

$$\mathbb{U}^t \mathbb{U}\mathbf{a} = \mathbb{U}^t \mathbf{Y}. \quad (2.8)$$

4. conclure. ■