

EXAMEN DU 9 JANVIER 2014  
 durée : 3h.

Sans document ni appareil électronique, une feuille (recto seul) manuscrite de notes personnelles est autorisée. Tous les calculs doivent être justifiés et rédigés avec soin.

Vous devez choisir et rendre les exercices parmi l'une des trois possibilités suivantes:

- choix A : Exercices 1, 2 et 3
- choix B : Exercices 1, 3 et 4
- choix C : Exercices 2 et 4

**EXERCICE 1 (4 pts)**

Soit  $A_\alpha$  la matrice définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

- Q. 1 Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la méthode itérative de Jacobi converge-t-elle ? ■
- Q. 2 Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la méthode itérative de Gauss-Seidel converge-t-elle ? ■

**EXERCICE 2 (10 pts)**

Soient  $n \geq 3$  un entier et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . On note  $h = x_{k+1} - x_k$ . Une fonction  $s$  définie sur  $[a; b]$  à valeurs réelles s'appelle **spline cubique** si elle est deux fois continûment différentiable et si, sur chaque intervalle  $[x_{k-1}; x_k]$ , elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Soit  $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$  et  $s$  une spline cubique vérifiant

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{2.1}$$

Q. 1 Montrer que si

$$s''(b)(f'(b) - s'(b)) = s''(a)(f'(a) - s'(a)) \tag{2.2}$$

alors

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx. \tag{2.3}$$

**Indications :** Poser  $r = f - s$  et montrer par intégrations par parties que  $\int_a^b s''(x)r''(x)dx = 0$ .

Soient  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $S_k$  un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$\begin{cases} S_k(x_{k-1}) & = f_{k-1} & (2.4a) \\ S_k(x_k) & = f_k & (2.4b) \\ S_k''(x_{k-1}) & = m_{k-1} & (2.4c) \\ S_k''(x_k) & = m_k. & (2.4d) \end{cases}$$

Q. 2 1. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme  $S_k$ .

2. Montrer que polynôme  $S_k$  peut s'écrire sous la forme

$$S_k(x) = a_k(x_k - x)^3 + b_k(x - x_{k-1})^3 + \alpha_k(x_k - x) + \beta_k(x - x_{k-1}) \tag{2.5}$$

en explicitant les coefficients  $(a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k)$  en fonction de  $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k)$  et  $h$ . ■

On note  $g$  la fonction dont la restriction à chaque intervalle  $[x_{k-1}; x_k]$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , est  $S_k$ .

**Q. 3** 1. Vérifier que  $g$  est bien définie sur  $[a; b]$ .

2. Montrer que  $g$  est une spline cubique si et seulement si,  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

$$m_{k+1} + 4m_k + m_{k-1} = \frac{6}{h^2}(f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}). \quad (2.6)$$

**Q. 4** 1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $g$  soit une spline cubique et vérifie  $g''(a) = 0$ ,  $g''(b) = 0$ , est que le vecteur  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \dots, m_n)^t$  soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \quad (2.7)$$

que l'on précisera.

2. Montrer que la matrice  $\mathbb{A}$  est inversible. ■

### EXERCICE 3 (6 pts)

Soient  $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $H$  un réel strictement positif et  $h \in ]0, H]$ . On note  $D_h$  l'opérateur défini par

$$D_h f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2). \quad (3.1)$$

**Q. 1** Montrer que l'opérateur  $D_h$  est linéaire. ■

**Q. 2** Montrer qu'il existe  $\xi_+ \in [x, x + h/2]$ ,  $\xi_- \in [x - h/2, x]$  tels que

$$\frac{D_h f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{24}h^2 + \frac{f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)}{5!2^5}h^4. \quad (3.2)$$

**Q. 3** 1. En déduire l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $D_{h/2} f(x)$  et  $D_h f(x)$  avec un reste qui s'écrit sous la forme  $C_h h^4$  où  $C_h$  dépend de la dérivée cinquième de  $f$ .

2. Montrer que l'on a

$$\left| f'(x) - \frac{8f(x + h/4) - 8f(x - h/4) - f(x + h/2) + f(x - h/2)}{3h} \right| \leq Ch^4 \quad (3.3)$$

où  $C$  dépend uniquement de la dérivée cinquième de  $f$ , de  $x$  et de  $H$ . ■

### EXERCICE 4 (10 pts)

**Q. 1** 1. Déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pour que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) \quad (4.1)$$

soit au moins d'ordre 2.

2. Montrer que cette formule est au plus d'ordre 3. ■

On suppose que  $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$ , et on note  $\mu = f'(0)$ .

**Q. 2** 1. Établir qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré 3 tel que  $P(-1) = f(-1)$ ,  $P(0) = f(0)$ ,  $P(1) = f(1)$  et  $P'(0) = \mu$ .

2. Montrer que quelque soit  $x \in [-1; 1]$  il existe  $\xi_x \in ]-1; 1[$  tel que

$$f(x) = P(x) + \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!} f^{(4)}(\xi_x). \quad (4.2)$$

**Indication :** On peut étudier les zéros de la fonction  $\varphi : t \mapsto (f(t) - P(t)) - (f(x) - P(x)) \frac{(t+1)t^2(t-1)}{(x+1)x^2(x-1)}$ .

3. En déduire qu'il existe une constante  $M$  dépendant de  $f^{(4)}$  telle que

$$\left| \int_{-1}^1 f(x)dx - (\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)) \right| \leq \frac{M}{90}. \quad (4.3)$$

**Q. 3** Soient  $c \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$  et  $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h], \mathbb{R})$ .

1. Déduire de (4.1) une formule de quadrature pour le calcul de  $\int_c^{c+h} g(t)dt$ .

2. Montrer que l'erreur de quadrature est majorée par  $\frac{\mathcal{M}}{2880}h^5$  où l'on déterminera la constante  $\mathcal{M}$ . ■

**Q. 4** Soit  $(x_k)_{k \in [0, n]}$  une discrétisation régulière<sup>1</sup> de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $v \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{R})$ .

1. A partir de (4.1), expliciter la formule **composite** associée permettant d'approcher  $\int_a^b v(s)ds$  et utilisant la discrétisation  $(x_k)_{k \in [0, n]}$ .

2. Calculer son erreur de quadrature. ■

---

<sup>1</sup> $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  et  $x_{k+1} = x_k + h$  avec  $h$  pas constant