# Rappels - Algèbre linéaire

Cuvelier François

Version du 9 septembre 2014

## Table des matières



•••••••••••••

Soit $V$ un **espace vectoriel** de dimension finie $n$, sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Vecteurs

Une **base** de $V$ est un ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de $n$ **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\boldsymbol{v}^t$ et $\boldsymbol{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\boldsymbol{v}^t = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre $\alpha$.

**Définition 1.1** — *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^t$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*
— *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*

**Définition 1.2** *L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ définie par*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^t.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^t.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad si \ \ \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i, \quad si \ \ \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

*est appelée* ***produit scalaire*** *euclidien si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, hermitien si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n .$$

**Définition 1.3** *Soit* $V$ *est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

- *Deux* ***vecteurs*** $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *sont* ***orthogonaux*** *si* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
- *Un* ***vecteur*** $\boldsymbol{v}$ *est* ***orthogonal à une partie*** $U$ *de* $V$ *si*

$$\forall \boldsymbol{u} \in U, \ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

  *On note* $\boldsymbol{v} \perp U$.
- *Un ensemble de vecteurs* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *de l'espace* $V$ *est dit* ***orthonormal*** *si*

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$$

  *où* $\delta_{ij}$ *est le* ***symbole de Kronecker*** *:* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$

**Définition 1.4** *Le vecteur nul est représenté par la lettre* $0$.

**Définition 1.5** *Soit* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ *non nul. On définit l'****opérateur de projection*** *sur* $\boldsymbol{u}$ *par*

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{1.1}$$

**Rappel 1.1 (Procédé de Gram-Schmidt)** *Soit* $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ *une base de* $\mathbb{K}^n$*. On construit successivement les vecteurs* $\boldsymbol{u}_i$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k \rangle} \boldsymbol{u}_k, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

*Ils forment une* ***base orthogonale*** *de* $\mathbb{K}^n$.
*En normalisant,* $\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle^{1/2}}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$*, on obtient la* ***base orthonormale*** $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ *de* $\mathbb{K}^n$.

# 2 Matrices

## 2.1 Généralités

Une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes est appelée *matrice de type* $(m,n)$, et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type $(m,n)$ à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n},$$

le premier indice $i$ correspond aux lignes et le second $j$ aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

**Définition 2.1** *La matrice nulle est représentée par la lettre* $0$.

**Définition 2.2**

- *Soit une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$*, on note* $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ *la* ***matrice adjointe*** *de la matrice* $\mathbb{A}$*, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^* \boldsymbol{v} \rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$$

  *qui entraine* $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
- *Soit une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$*, on note* $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *la* ***matrice transposée*** *de la matrice* $\mathbb{A}$*, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^t \boldsymbol{v} \rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$$

  *qui entraine* $(\mathbb{A}^t)_{ij} = a_{ji}$.

**Définition 2.3** *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur* ***produit*** *$\mathbb{AB} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par*

$$(\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \forall i \in [\![1,m]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!]. \tag{2.1}$$

On a alors

$$(\mathbb{AB})^{\mathsf{t}} = \mathbb{B}^{\mathsf{t}}\mathbb{A}^{\mathsf{t}}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{2.2}$$
$$(\mathbb{AB})^{*} = \mathbb{B}^{*}\mathbb{A}^{*}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{2.3}$$

**Définition 2.4** *Une matrice de type $(n,n)$ est dite* ***matrice carrée*** *, ou* ***matrice d'ordre*** *$n$ . On note*

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n,n} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

*l'anneau des matrices carrées d'ordre $n$, à éléments dans le corps $\mathbb{K}$.*

| Les matrices considérées jusqu'a la fin de ce paragraphe sont carrées. |
|---|

**Définition 2.5** *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ alors les éléments $a_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés* ***éléments diagonaux*** *et les éléments $a_{ij} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés* ***éléments hors-diagonaux****.*

**Définition 2.6** *On appelle* ***matrice identitée*** *de $\mathcal{M}_n$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nuls. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a*

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij},\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

**Définition 2.7** *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est* ***inversible*** *s'il existe une* ***unique*** *matrice de $\mathcal{M}_n$, notée $\mathbb{A}^{-1}$ et appelée* ***matrice inverse*** *de la matrice $\mathbb{A}$, telle que*

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{2.4}$$

*Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est* ***singulière*** *.*

**Rappel 2.1** *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors $\mathbb{AB}$ inversible et*

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{2.5}$$
$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{2.6}$$
$$(\mathbb{AB})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{2.7}$$
$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \tag{2.8}$$

**Définition 2.8** *Une matrice carrée $\mathbb{A}$ est :*

- ◇ ***symétrique*** *si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,*
- ◇ ***hermitienne*** *si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,*
- ◇ ***normale*** *si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,*
- ◇ ***orthogonale*** *si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,*
- ◇ ***unitaire*** *si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,*

**Définition 2.9** *Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :*

- ◇ ***diagonale*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,*
- ◇ ***triangulaire supérieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,*
- ◇ ***triangulaire inférieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,*
- ◇ ***triangulaire*** *si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure*
- ◇ ***à diagonale dominante*** *si*

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,\ \forall i \in [\![1,n]\!], \tag{2.9}$$

- ◇ ***à diagonale strictement dominante*** *si*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,\ \forall i \in [\![1,n]\!]. \tag{2.10}$$

**Définition 2.10** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice* ***hermitienne****.*

- *Elle est* ***définie positive*** *si*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0, \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{2.11}$$

- *Elle est* ***semi définie positive*** *si*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0, \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{2.12}$$

**Définition 2.11** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par*

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Définition 2.12** *Soit $\mathcal{T}_n$ le* ***groupe des permutations*** *de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la* ***matrice de permutation***

$$P_\sigma = \left(\delta_{i\sigma(j)}\right).$$

**Rappel 2.2** *Une matrice de permutation est orthogonale.*

**Définition 2.13** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. Le* ***déterminant*** *d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par*

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

*où $\varepsilon_\sigma$ désigne la signature de la permutation $\sigma$.*

**Définition 2.14** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est* ***valeur propre*** *de $\mathbb{A}$ s'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}. \tag{2.13}$$

*Le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé* ***vecteur propre*** *associé à la valeur propre $\lambda$.*
*Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est appelé* ***élément propre*** *de $\mathbb{A}$.*

**Définition 2.15** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace*

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}\} = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \tag{2.14}$$

*est appelé* ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre $\lambda$.*

**Définition 2.16** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré $n$ défini par*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \tag{2.15}$$

*est appellé* ***polynôme caractéristique*** *de la matrice $\mathbb{A}$.*

**Rappel 2.3** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.*
- *Si la racine $\lambda$ de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ est de multiplicité $k$, on dit que la valeur propre $\lambda$ est de multiplicité algébrique $k$.*
- *La matrice $\mathbb{A}$ possède $n$ valeurs propres distinctes ou non.*

**Rappel 2.4** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ des valeurs propres distinctes de $\mathbb{A}$. On a*

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}. \tag{2.16}$$

**Définition 2.17** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in [\![1, n]\!]$, les $n$ valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le* ***spectre*** *de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble*

$$\operatorname{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{2.17}$$

*du plan complexe.*

**Rappel 2.5** *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n$. On a les relations suivantes*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbb{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), & (2.18)\\
\det(\mathbb{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), & (2.19)\\
\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), & (2.20)\\
\operatorname{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) &= \operatorname{tr}\mathbb{A} + \operatorname{tr}\mathbb{B}, & (2.21)\\
\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), & (2.22)\\
\det(\mathbb{A}^*) &= \overline{\det(\mathbb{A})}. & (2.23)
\end{aligned}
$$

**Définition 2.18** *Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est le nombre $\geqslant 0$ défini par*

$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbb{A})| \,;\, i \in [\![1, n]\!]\}$$

**Définition 2.19** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels*

- ◇ *On note $\operatorname{Ker}(\mathbb{A}) = \{\boldsymbol{v} \in X \,;\, \mathbb{A}\boldsymbol{v} = 0\}$ le **noyau** de l'application linéaire $\mathbb{A} : X \to Y$.*
- ◇ *On note $\operatorname{Im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\boldsymbol{v} \in Y \,;\, \boldsymbol{v} \in X\}$ l'**image** de l'application linéaire $\mathbb{A} : X \to Y$.*

**Définition 2.20** *Le rang d'une matrice $\mathbb{A}$, noté $\operatorname{rang}(\mathbb{A})$, est défini comme le rang de l'application linéaire $\mathbb{A}$ qui lui et associé*

$$\operatorname{rang}(\mathbb{A}) = \dim(\operatorname{Im}(\mathbb{A})).$$

## 2.2 Matrices particulières

**Définition 2.21** *On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre $n$, on obtient la **sous matrice principale** d'ordre $k$.*

**Définition 2.22** *On appelle **matrice bloc** une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N$ pouvant s'écrire sous la forme*

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} & \cdots & \mathbb{A}_{1,n}\\
\mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{A}_{n-1,n}\\
\mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \mathbb{A}_{n,n-1} & \mathbb{A}_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

*où $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice et les matrices diagonales $\mathbb{A}_{i,i}$ sont carrées.*

**Définition 2.23** *On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$).*

**Définition 2.24** *On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ .*

**Remarque 1**

*Il est possible de définir des matrices blocs non carrées.*

**Définition 2.25** *On appelle **matrice bande** une matrice $\mathbb{A}$ telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j-i| \leqslant c$. $c$ est la **demi largeur de bande**.*

*Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale** . Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale** .*

## 3 Normes vectorielles et normes matricielles

**Définition 3.1** *Une **norme** sur un espace vectoriel $V$ est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes*

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0,$
- $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall\alpha \in \mathbb{K}, \ \forall\boldsymbol{v} \in V,$
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ *(inégalité triangulaire).*

*Une norme sur $V$ est également appelée **norme vectorielle** .*
*On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.*

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \,.$$

**Théorème 3.1** *Soit $V$ un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par*

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$

*est une norme.*

**Rappel 3.1** *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$*

$$\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \, \|\boldsymbol{v}\|_q \,. \tag{3.1}$$

*Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.*

**Définition 3.2** *Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel $V$, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes $C$ et $C'$ telles que*

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leqslant C \, \|\boldsymbol{v}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{v}\| \leqslant C' \, \|\boldsymbol{v}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.2}$$

**Rappel 3.2** *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

**Définition 3.3** *Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = 0,$
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \ \forall\alpha \in \mathbb{K}, \ \forall\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \ \forall\,(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *(inégalité triangulaire)*
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|, \ \forall\,(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

**Rappel 3.3** *Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \,, \tag{3.3}$$

*est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).*
*De plus*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \, \|\boldsymbol{v}\| \ \ \forall\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \tag{3.4}$$

*et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{3.5}$$

*Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \quad et \quad \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| . \tag{3.6}$$

*Enfin une norme subordonnée vérifie toujours*

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \tag{3.7}$$

**Théorème 3.2** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a*

$$\|\mathbb{A}\|_1 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{3.8}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\right)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{3.9}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{3.10}$$

*La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 . \tag{3.11}$$

*Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :*

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{3.12}$$

**Remarque 2**

1. *Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.*
2. *Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.*

**Théorème 3.3**

1. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors*
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\| . \tag{3.13}$$
2. *Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*
$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{3.14}$$

**Théorème 3.4** *L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left( \sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}, \tag{3.15}$$

*pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre $n$, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geqslant 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie*

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\, \|\mathbb{A}\|_2 , \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \tag{3.16}$$

*De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.*

**Théorème 3.5**

1. *Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant*
$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$
*Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et*
$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$
2. *Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement*
$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$
*pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.*

# 4 Réduction des matrices

**Définition 4.1** *Soit $A : V \to V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. Relativement à une autre base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, la même application est représentée par la matrice*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \tag{4.1}$$

*où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le $j$-ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\boldsymbol{f}_j$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ dans le base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$**.*

*Si la base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est orthonormée, on a :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_{n-1}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_n\rangle \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

**Définition 4.2** *On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit diagonale.*

**Rappel 4.1** *On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le $j$-ème vecteur colonne $\boldsymbol{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_j$. On a*

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Longleftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j,\ \forall j \in [\![1, n]\!]. \tag{4.3}$$

*C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.*

**Théorème 4.1**

1. *Etant donnée une matrice **carrée** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.*
2. *Etant donnée une matrice **normale** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.*
3. *Etant donnée une matrice **symétrique** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{O}$ telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{O}$ soit **diagonale**.*

# 5 Suites de vecteurs et de matrices

**Définition 5.1** *Soit $V$ un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de $V$ **converge vers un élément $\boldsymbol{v} \in V$**, si*

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

*et on écrit*

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

**Théorème 5.1** *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{v} = 0$ *pour tout vecteur* $\boldsymbol{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|\bullet\|$.

**Théorème 5.2** *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$