

TRAVAUX DIRIGÉS - 2

1 Normes vectorielles et matricielles

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, définie positive. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (nécessairement réelles et strictement positive) rangées par ordre croissant. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n. \quad (1.1)$$

Q. 1 Montrer que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq \|\mathbf{x}\|^4, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \quad (1.2)$$

■

Soit $\mathbb{P} = (\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda_n \mathbb{I})\mathbb{A}^{-1}$, où \mathbb{I} désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 2 1. Etudier le signe de $\langle \mathbb{P}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

2. En déduire que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \lambda_1 \lambda_n \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq (\lambda_1 + \lambda_n) \|\mathbf{x}\|^2. \quad (1.3)$$

■

Q. 3 Etablir l'inégalité de Kantorovich :

$$\|\mathbf{x}\|^4 \leq \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} \|\mathbf{x}\|^4, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \quad (1.4)$$

■

Q. 4 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\| = 1$.

1. Montrer que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \geq 0 \quad (1.5)$$

2. On pose $\mu = \lambda_1 + \lambda_n - \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, Montrer que $\mu > 0$.

3. Etablir, à partir de (1.3), l'inégalité :

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \leq \lambda_1 + \lambda_n - \frac{\mu^2 + \lambda_1 \lambda_n}{\mu}. \quad (1.6)$$

4. En déduire

$$0 \leq \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1} \leq \left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1} \right)^2. \quad (1.7)$$

■

EXERCICE 2

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{C}^n .

Q. 1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$. ■

Q. 2 En calculant $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (2.1)$$

■

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (2.1) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. ■

EXERCICE 3

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{C}^n .

Q. 1 Démontrer l'inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3.1)$$

Q. 2 Si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont non nuls, prouver que l'inégalité (3.1) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ avec α un réel strictement positif. ■

Q. 3 Dédurre de (3.1) l'inégalité suivante :

$$|\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2. \quad (3.2)$$

Q. 4 Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$, p vecteurs de \mathbb{C}^n . Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^p \mathbf{x}_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^p \|\mathbf{x}_i\|_2. \quad (3.3)$$

EXERCICE 4

Q. 1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta. \quad (4.1)$$

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs non nuls de \mathbb{C}^n . Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (4.1), montrer que

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (4.2)$$

Q. 3 En déduire alors l'inégalité de Hölder

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (4.3)$$

EXERCICE 5

Soit $p > 1$ et q le nombre tel que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

Q. 1 Vérifier que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ on a

$$|\alpha + \beta|^p \leq |\alpha| |\alpha + \beta|^{p/q} + |\beta| |\alpha + \beta|^{p/q}. \quad (5.1)$$

Q. 2 En utilisant l'inégalité de Hölder et (5.2), démontrer l'inégalité de Minkowski :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, p \geq 1. \quad (5.2)$$

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'application $\|\bullet\|_F$ par

$$\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2. \quad (6.1)$$

Q. 1 On note, respectivement, $\mathbf{A}_{i\star}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbf{A}_{\star j}$, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les vecteurs lignes et colonnes de \mathbb{A} . Montrer que

$$\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{A}_{i\star}\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_{\star j}\|_2^2 = \text{tr } \mathbb{A}^* \mathbb{A}. \quad (6.2)$$

Q. 2 Montrer que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \quad (6.3)$$

Q. 3 Montrer que cette application est une norme matricielle (nommée norme de Frobenius). ■

Q. 4 Calculer $\|\mathbb{A}^*\|_F$ et $\|\mathbb{I}_n\|_F$ où \mathbb{I}_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ■

EXERCICE 7

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Montrer les propriétés suivantes

1. $\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|_2=1 \\ \|\mathbf{y}\|_2=1}} |\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|$.
2. $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}^*\|_2$.
3. $\|\mathbb{A}^* \mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2^2$.
4. $\|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{V}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$ quand $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{V}\mathbb{V}^* = \mathbb{I}$

EXERCICE 8

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ et $p \geq 1$. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbf{x}\|_p \quad (8.1)$$

$$\|\mathbb{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_p \quad (8.2)$$

$$\|\mathbb{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p \leq 1} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_p \quad (8.3)$$

$$\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_p \leq \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbb{B}\|_p \quad (8.4)$$

2 Conditionnement

EXERCICE 9

Soit le système linéaire définie par $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ définie par :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Q. 1 Trouver la solution \mathbf{x} de ce système. ▪

Q. 2 On pose $\Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la solution $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ du système

$$(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Q. 3 Vérifier l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|_p} \leq \text{cond}_p(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|_p}{\|\mathbb{A}\|_p} \quad (9.1)$$

pour $p = 1, 2, \infty$. ▪

EXERCICE 10

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{ii} = 1$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i+1} = 2$, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et $a_{ij} = 0$ sinon.

Q. 1 Montrer que $\text{cond}_2(\mathbb{A}) \geq 2^n$. ▪

Indication : utiliser le vecteur \mathbf{e}_n de la base canonique pour montrer que $\|\mathbb{A}\|_2 \geq 2$ et $\|\mathbb{A}^{-1}\|_2 \geq 2^{n-1}$.

EXERCICE 11

Soit $\mathbb{A}_n(\varepsilon) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{A}_n(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 1 Calculer les valeurs propres de $\mathbb{A}_n(0)$ et $\mathbb{A}_n(\varepsilon)$. ▪

Q. 2 Appliquer les résultats à $n = 40$ et $\varepsilon = 10^{-40}$. Conclure. ▪

3 Quotient de Rayleigh

EXERCICE 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le **quotient de Rayleigh** de la matrice \mathbb{A} :

$$\begin{cases} \rho_{\mathbb{A}} : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{v} & \longmapsto \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{cases}.$$

Q. 1 Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, calculer $\rho_{\mathbb{A}}(\alpha\mathbf{v})$. ▪

On suppose que \mathbb{A} est hermitienne, de valeurs propres

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

les vecteurs propres associés $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ vérifiant

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_k le sous-espace de \mathbb{C}^n engendré par les vecteurs \mathbf{p}_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et on note \mathcal{V}_k l'ensemble des sous-espaces de dimension k de \mathbb{C}^n . On pose par ailleurs : $V_0 = \{0\}$ et $\mathcal{V}_0 = V_0$.

Q. 2 Montrer que les valeurs propres de \mathbb{A} admettent les caractérisations suivantes, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lambda_k = \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{p}_k), \quad (12.1)$$

$$\lambda_k = \max_{\substack{\mathbf{v} \in V_k \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (12.2)$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{\mathbf{v} \perp V_{k-1} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (12.3)$$

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{\mathbf{v} \in W \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}), \quad (12.4)$$

$$\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{\substack{\mathbf{v} \perp W \\ \mathbf{v} \neq 0}} \rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}). \quad (12.5)$$

■

Q. 3 Montrer que

$$\{\rho_{\mathbb{A}}(\mathbf{v}) ; \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}. \quad (12.6)$$

■