Travaux dirigés - 3

Exercice 1

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha_l \in \mathbb{K}^*$, $\forall l \in [\![2, n]\!]$. Soit $i \in [\![2, n]\!]$, on note $\mathbb{L}^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice définie par

$$\left\{\begin{array}{lcll} L^i_{kk} & = & 1, & \forall k \in [\![1, n]\!], \\ L^i_{i1} & = & \alpha_i, & \\ L^i_{kl} & = & 0, \text{ sinon.} & \end{array}\right.$$

Q. 1 *Soit $i \in [\![2, n]\!]$.*

1. *Représenter la matrice $\mathbb{L}^i$.*
2. *Calculer* $\det \mathbb{L}^i$ *et déterminer la matrice inverse de $\mathbb{L}^i$.*
3. *Soit $j \in [\![2, n]\!]$, $j \neq i$. Calculer $\mathbb{L} = \mathbb{L}^i\mathbb{L}^j$. Que peut-on dire de l'inverse de $\mathbb{L}$.* ∎

Q. 2 *Soit $i \in [\![2, n]\!]$.*

1. *Calculer la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}^i\mathbb{A}$. Quelles opérations usuelles a-t'on opéré sur la matrice $\mathbb{A}$?*
2. *Calculer la matrice $\mathbb{B} = \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j\mathbb{A}$. Quelles opérations usuelles a-t'on opéré sur la matrice $\mathbb{A}$?* ∎

Q. 3 ***Application à un système linéaire.*** *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. Montrer que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \prod_{j=2}^n \mathbb{L}^j\boldsymbol{b}.$$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q. 1
1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*
2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.* ∎

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{1,1} \neq 0$. On note $(\boldsymbol{a}_1^*, \dots, \boldsymbol{a}_n^*)$ les vecteurs lignes de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_1$ le premier vecteur colonne.

Q. 2
1. *Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
2. *Expliciter la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$.* ∎

Exercice 3

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Définir proprement cette matrice et la représenter.* ∎

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $(\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n^*)$ les vecteurs lignes de $\mathbb{A}$ et $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ les vecteurs colonnes de $\mathbb{B}$

Q. 2 1. *Déterminer $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

2. *Déterminer $\mathbb{B}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{B}$.* ▪

Q. 3 1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.* ▪

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 1. *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G}_1)| = 1$ et $\mathbb{G}_1\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{G}_1$.* ▪

Q. 2 1. *Construire, par récurrence, une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A} = \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U}$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{G}$.*

3. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* ▪

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?* ▪

Q. 4 *On suppose que les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.*

1. *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure telle que $g_{i,i} = 1$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathbb{G}\mathbb{A} = \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U}$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

2. *On note $\mathbb{L} = \mathbb{G}^{-1}$. Quelles sont les propriétés de la matrice $\mathbb{L}$? (on calculera les éléments diagonaux)*

3. *Montrer alors que la factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ est unique.* ▪

Indication : Utiliser les résultats des exercices 2 et 3

Exercice 5

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ où $\mathbb{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unitée et $\mathbb{U}$ une matrice triangulaire supérieure.

Q. 1 *Montrer que cette factorisation est unique.* ▪

Q. 2 1. *Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients des matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$.*

2. ***[algo]*** *Ecrire la fonction* FactLU *permettant de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de la méthode précédente.* ▪

On suppose, de plus, que la matrice $\mathbb{A}$ est symétrique.

Q. 3 *Montrer qu'il existe une unique factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t$ où $\mathbb{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité (i.e. $L_{ii} = 1$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$) et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale inversible.* ▪

Q. 4 *Montrer qu'une matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t$ où $\mathbb{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale telle que $D_{ii} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ si et seulement si $\mathbb{A}$ est symétrique définie positve.* ▪

Q. 5 *En déduire que $\mathbb{A}$ admet l'unique factorisation de cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure telle que $B_{ii} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ si et seulement si $\mathbb{A}$ est symétrique définie positve.* ▪

Q. 6 *On suppose $\mathbb{A}$ symétrique définie positive.*

1. *Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ précédente.*
2. ***[algo]** Ecrire la fonction* CHOLESKY *permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$ de la méthode précédente.* ▪

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On considère la décomposition par blocs de $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{B}^t & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $p \in [\![1, n-1]\!]$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{C} - \mathbb{B}^t\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ est symétrique définie positive.* ▪

On considère la décomposition de Cholesky de $\mathbb{M}$: $\mathbb{M} = \mathbb{R}^t\mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs. On écrit la décomposition de $\mathbb{R}$ par blocs

$$\mathbb{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{12} \\ \hline 0 & \mathbb{R}_{22} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{R}_{11} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Q. 2
1. *Montrer que $\mathbb{R}_{22}^t\mathbb{R}_{22} = \mathbb{E}$.*
2. *En déduire une autre démonstration du caractère symétrique définie positive de la matrice $\mathbb{E}$.* ▪

Q. 3 *Soit $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que*

$$\inf_{\boldsymbol{x}\neq 0} \left(\frac{\langle \mathbb{M}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\right)^{1/2} = \frac{1}{\|\mathbb{R}^{-1}\|_2} \leqslant r_{ii} \leqslant \|\mathbb{R}\|_2 = \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \left(\frac{\langle \mathbb{M}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\right)^{1/2} \tag{6.1}$$

▪

Q. 4 *En déduire que*

$$\operatorname{cond}_2(\mathbb{R}) \geqslant \max_{(i,k)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{r_{ii}}{r_{kk}}.$$