Travaux dirigés - 4

Exercice 1

Q. 1 *Montrer que pour la matrice*

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la méthode de Jacobi converge, tandis que la méthode de Gauss-Seidel diverge. ■

Q. 2 *Montrer que pour la matrice*

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la méthode de Jacobi diverge, tandis que la méthode de Gauss-Seidel converge. ■

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive décomposée (par points) sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D}-\mathbb{E}-\mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\mathbb{A})$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure et d'éléments nuls sur la diagonale et $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure et d'éléments nuls sur la diagonale.

On étudie une méthode itérative de résolution su système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} \quad (2.1)$$
$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b} \quad (2.2)$$

Q. 1 *Ecrire le vecteur $\boldsymbol{x}_{k+1}$ sous la forme*

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{c} \quad (2.3)$$

en explicitant le matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$. ■

Q. 2 1. *Montrer que*

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \quad (2.4)$$

2. *Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. Montrer que*

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \quad (2.5)$$

■

Q. 3 *En déduire la convergence de cette méthode.* ■

Q. 4 *Etendre ces résultats au cas d'une décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ par blocs.* ■

Exercice 3

Soit $\mathbb{A}$ une matrice $n \times n$ réelle symétrique et définie positive. On s'intéresse à la résolution du problème

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (3.1)$$

On introduit la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{D} + \mathbb{H} + \mathbb{V}$, où $\mathbb{D} = \alpha\mathbb{I}$, $\alpha > 0$ et $\mathbb{H}$ et $\mathbb{V}$ sont deux matrices symétriques, telles que les matrices $\mathbb{D} + \mathbb{H}$ et $\mathbb{D} + \mathbb{V}$ soient inversibles. On considère la méthode itérative :

$$(\mathbb{D} + \mathbb{H})\boldsymbol{x}^{[k+\frac{1}{2}]} = -\mathbb{V}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}, \quad (3.2)$$
$$(\mathbb{D} + \mathbb{V})\boldsymbol{x}^{[k+1]} = -\mathbb{H}\boldsymbol{x}^{[k+\frac{1}{2}]} + \boldsymbol{b}. \quad (3.3)$$

Q. 1 *Exprimer* $\boldsymbol{x}^{[k+1]}$ *en fonction de* $\boldsymbol{x}^{[k]}$. *En déduire que* $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{x}$, *si et seulement si :*

$$\rho\left((\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) < 1.$$

Q. 2 1. *Posons* $\mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{H}$, $\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{V}$. *Vérifier que*

$$\rho\left((\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) = \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\right).$$

2. *Montrer que les matrices* $\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}$ *et* $\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}$ *sont symétriques.*

3. *En déduire que :*

$$\rho\left((\mathbb{D}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{D}+\mathbb{H})^{-1}\mathbb{V}\right) \leqslant \rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right)\rho\left(\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})^{-1}\right).$$

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right) < 1 \Longleftrightarrow \max_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathbb{B})}\left|\frac{\mu}{1+\mu}\right| < 1. \tag{3.4}$$

2. *En déduire que*

$$\rho\left(\mathbb{B}(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right) < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{I}+\mathbb{B} \quad \textit{est définie positive.}$$

3. *En déduire que la méthode itérative* (3.2)-(3.3) *converge dès que les matrices* $\frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{H}$ *et* $\frac{1}{2}\mathbb{D}+\mathbb{V}$ *sont définies positives.* ■

On va maintenant étudier une généralisation de (3.2)-(3.3). On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous les formes $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ et $\mathbb{A} = \mathbb{P} - \mathbb{Q}$, où les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{P}$ sont inversibles. On considère la méthode itérative :

$$\mathbb{M}\boldsymbol{x}^{[k+\frac{1}{2}]} = \mathbb{N}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}, \tag{3.5}$$
$$\mathbb{P}\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{Q}\boldsymbol{x}^{[k+\frac{1}{2}]} + \boldsymbol{b}. \tag{3.6}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{[k]} &= \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{\eta}^{[k]} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{e}^{[k]} \\ \boldsymbol{e}^{[k+\frac{1}{2}]} &= \boldsymbol{x}^{[k+\frac{1}{2}]} - \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{e}^{[k+\frac{1}{2}]} \end{aligned}$$

On note $\|\bullet\|_{\mathbb{A}}^2$ la norme définie par

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{A}}^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle.$$

Q. 4 1. *Vérifier que* $\boldsymbol{\eta}^{[k]} = \boldsymbol{e}^{[k]} - \boldsymbol{e}^{[k+\frac{1}{2}]}$.

2. *En déduire*

$$\left\|\boldsymbol{e}^{[k+\frac{1}{2}]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\|\boldsymbol{e}^{[k]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 = -\left\langle (\mathbb{M}^t+\mathbb{N})\boldsymbol{\eta}^{[k]}, \boldsymbol{\eta}^{[k]}\right\rangle \tag{3.7}$$

3. *Vérifier que* $\boldsymbol{\eta}^{[k+1/2]} = \boldsymbol{e}^{[k+1/2]} - \boldsymbol{e}^{[k+1]}$.

4. *En déduire*

$$\left\|\boldsymbol{e}^{[k+1]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\|\boldsymbol{e}^{[k+\frac{1}{2}]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 = -\left\langle (\mathbb{P}^t+\mathbb{Q})\boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]}, \boldsymbol{\eta}^{[k+\frac{1}{2}]}\right\rangle. \tag{3.8}$$

■

Q. 5 1. *Montrer que les matrices* $\mathbb{M}^t + \mathbb{N}$ *et* $\mathbb{P}^t + \mathbb{Q}$ *sont symétriques.*

2. *Montrer que si les matrices* $\mathbb{M}+\mathbb{N}^t$ *et* $\mathbb{P}+\mathbb{Q}^t$ *sont définies positives, la méthode* (3.5)-(3.6) *converge vers* $\boldsymbol{x}$ *solution de* (3.1) . *On pourra pour cela montrer que* $\left\|\boldsymbol{e}^{[k]}\right\|_{\mathbb{A}}^2$ *est une suite convergente, puis utiliser le fait que*

$$\left\|\boldsymbol{e}^{[k+1]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 - \left\|\boldsymbol{e}^{[k]}\right\|_{\mathbb{A}}^2 \to 0.$$