

EXAMEN DU 9 JANVIER 2014
 durée : 3h.

Sans document ni appareil électronique, une feuille (recto seul) manuscrite de notes personnelles est autorisée. Tous les calculs doivent être justifiés et rédigés avec soin.

Vous devez choisir et rendre les exercices parmi l'une des trois possibilités suivantes:

- choix A : Exercices 1, 2 et 3
- choix B : Exercices 1, 3 et 4
- choix C : Exercices 2 et 4

EXERCICE 1 (4 pts)

Soit A_α la matrice définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 Pour quelles valeurs de α la méthode itérative de Jacobi converge-t-elle ? ■

Q. 2 Pour quelles valeurs de α la méthode itérative de Gauss-Seidel converge-t-elle ? ■

Correction

On pose

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a alors $A = D - E - F$.

Q. 1 La matrice de Jacobi J est donnée par

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 0 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode itérative de Jacobi converge si et seulement si $\rho(J) < 1$. On va donc calculer les valeurs propres de J qui sont les racines de son polynôme caractéristique P_J . On a

$$P_J(t) = \det(J - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & -t & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & -t \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & t & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha & t \end{pmatrix}$$

Après calcul, on obtient

$$P_J(t) = -t^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 t.$$

Les racines de P_J sont 0 et $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha|$. Pour obtenir la convergence de la méthode de Jacobi, il faut et il suffit que $\frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha| < 1$ c'est à dire $\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. ■

Q. 2 La matrice de Gauss-Seidel \mathcal{L}_1 est donnée par

$$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8}\alpha^2 & -\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{8}\alpha^3 & \frac{1}{4}\alpha^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -4\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & -4\alpha \\ 0 & -\alpha^3 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

La méthode itérative de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$. On va donc calculer les valeurs propres de \mathcal{L}_1 qui sont les racines de son polynôme caractéristique $P_{\mathcal{L}_1}$. On a

$$P_{\mathcal{L}_1}(t) = \det(\mathcal{L}_1 - t\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -t & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 - t & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{8}\alpha^3 & \frac{1}{4}\alpha^2 - t \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\alpha^2 + t & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \frac{1}{8}\alpha^3 & -\frac{1}{4}\alpha^2 + t \end{pmatrix}$$

Après calcul, on obtient

$$P_{\mathcal{L}_1}(t) = -t^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 t.$$

Les racines de $P_{\mathcal{L}_1}$ sont donc 0 et $\frac{\alpha^2}{2}$. Pour obtenir la convergence de la méthode de Gauss-Seidel, il faut et il suffit que $\frac{\alpha^2}{2} < 1$ c'est à dire $\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. ■

◇

EXERCICE 2 (10 pts)

Soient $n \geq 3$ un entier et $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note $h = x_{k+1} - x_k$. Une fonction s définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles s'appelle **spline cubique** si elle est deux fois continûment différentiable et si, sur chaque intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ et s une spline cubique vérifiant

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.1)$$

Q. 1 Montrer que si

$$s''(b)(f'(b) - s'(b)) = s''(a)(f'(a) - s'(a)) \quad (2.2)$$

alors

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx. \quad (2.3)$$

Indications : Poser $r = f - s$ et montrer par intégrations par parties que $\int_a^b s''(x)r''(x)dx = 0$.

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et S_k un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$\begin{cases} S_k(x_{k-1}) & = f_{k-1} & (2.4a) \\ S_k(x_k) & = f_k & (2.4b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_k''(x_{k-1}) & = m_{k-1} & (2.4c) \\ S_k''(x_k) & = m_k. & (2.4d) \end{cases}$$

Q. 2 1. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme S_k .

2. Montrer que polynôme S_k peut s'écrire sous la forme

$$S_k(x) = a_k(x_k - x)^3 + b_k(x - x_{k-1})^3 + \alpha_k(x_k - x) + \beta_k(x - x_{k-1}) \quad (2.5)$$

en explicitant les coefficients $(a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k)$ en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k)$ et h . ■

On note g la fonction dont la restriction à chaque intervalle $[x_{k-1}; x_k]$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est S_k .

Q. 3 1. Vérifier que g est bien définie sur $[a; b]$.

2. Montrer que g est une spline cubique si et seulement si, $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$m_{k+1} + 4m_k + m_{k-1} = \frac{6}{h^2}(f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}). \quad (2.6)$$

Q. 4 1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une spline cubique et vérifie $g''(a) = 0$, $g''(b) = 0$, est que le vecteur $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n+1} = (m_0, m_1, \dots, m_n)^t$ soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \quad (2.7)$$

que l'on précisera.

2. Montrer que la matrice \mathbb{A} est inversible. ■

Correction



Théorème d'intégration par parties

Soient $u \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Q. 1 On pose $r = f - s$. On a alors $r \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ et,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, r(x_i) = 0. \quad (2.8)$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_a^b (f''(x))^2 dx &= \int_a^b (s''(x) + r''(x))^2 dx \\ &= \int_a^b (s''(x))^2 dx + 2 \int_a^b s''(x)r''(x) dx + \int_a^b (r''(x))^2 dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

Montrons que $\int_a^b s''(x)r''(x)dx = 0$.

On ne peut effectuer une intégration par partie pour $\int_a^b s''(x)r''(x)dx$ car r'' et s'' ne sont pas dérivables. Par contre, on a

$$\int_a^b s''(x)r''(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)r''(x)dx$$

et, sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, s'' est un polynôme de degré au plus 1. On a donc $s'' \in \mathcal{C}^1([x_{i-1}, x_i], \mathbb{R})$ et $r' \in \mathcal{C}^1([x_{i-1}, x_i], \mathbb{R})$ et il est alors possible de faire une intégration par partie avec $u = r'$ et $v = s''$ sur $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)r''(x)dx = [s''(x)r'(x)]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''(x)r'(x)dx. \quad (2.10)$$

Or, sur $[x_{i-1}, x_i]$, $s \in \mathbb{R}^3[X]$ et donc s''' est constante, ce qui donne, en utilisant (2.8),

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''(x)r'(x)dx = s'''(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} r'(x)dx = s'''(x_i)(r(x_i) - r(x_{i-1})) = 0.$$

De (2.10), On a alors, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)r''(x)dx = s''(x_i)r'(x_i) - s''(x_{i-1})r'(x_{i-1}).$$

En sommant, on abouti a

$$\int_a^b s''(x)r''(x)dx = s''(x_n)r'(x_n) - s''(x_0)r'(x_0) = s''(b)r'(b) - s''(a)r'(a).$$

Sous l'hypothèse (2.2) on a bien $\int_a^b s''(x)r''(x)dx = 0$. L'équation (2.9) devient alors

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx = \int_a^b (s''(x))^2 dx + \int_a^b (r''(x))^2 dx.$$

D'où

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx \geq \int_a^b (s''(x))^2 dx.$$

Q. 2 1. Soit $\Phi_k : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\Phi_k(P) = (P(x_{k-1}), P(x_k), P''(x_{k-1}), P''(x_k))^t.$$

L'existence et l'unicité du polynôme S_k est équivalent à la bijectivité de Φ_k . Cette dernière étant une application entre deux espaces vectoriels de même dimension finie 4, elle est bijective si et seulement si elle est injective. Pour établir l'injectivité de Φ_k il faut montrer que son noyau est réduit au polynôme nul.

Soit $P \in \text{Ker } \Phi_k$ alors $\Phi_k(P) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que x_{k-1} et x_k sont racines de P , et P s'écrit alors sous la forme

$$P(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)Q(x)$$

avec $Q(x) = \alpha x + \beta$ polynôme de degré 1.

On a

$$P'(x) = (x - x_{k-1})Q(x) + (x - x_k)Q(x) + \alpha(x - x_{k-1})(x - x_k)$$

et

$$P''(x) = 2(Q(x) + \alpha(x - x_{k-1})) + \alpha(x - x_k).$$

Comme $P''(x_{k-1}) = P''(x_k) = 0$, on obtient

$$\begin{cases} Q(x_{k-1}) + \alpha(x_{k-1} - x_k) = 0, \\ Q(x_k) + \alpha(x_k - x_{k-1}) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(x_{k-1} - h) + \beta = 0, \\ \alpha(x_k + h) + \beta = 0, \end{cases}$$

En soustrayant la première équation à la deuxième, on obtient $3\alpha h = 0$. Comme $h \neq 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$. D'où $Q \equiv 0$ et donc $P \equiv 0$.

2. On a $S_k''(x) = 6a_k(x_k - x) + 6b_k(x - x_{k-1})$. Pour déterminer a_k et b_k , on utilise les équations (2.4c) et (2.4d) qui deviennent respectivement $6ha_k = m_{k-1}$ et $6hb_k = m_k$. On obtient

$$a_k = \frac{m_{k-1}}{6h} \text{ et } b_k = \frac{m_k}{6h}.$$

Pour déterminer α_k et β_k on utilise les équations (2.4a) et (2.4b) qui deviennent respectivement

$$a_k h^3 + \alpha_k h = f_{k-1} \text{ et } b_k h^3 + \beta_k h = f_k.$$

En remplaçant a_k et b_k par leurs valeurs, on obtient

$$\alpha_k = \frac{f_{k-1}}{h} - \frac{h}{6}m_{k-1} \text{ et } \beta_k = \frac{f_k}{h} - \frac{h}{6}m_k.$$

Q. 3 1. On a par définition $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(x) = S_k(x)$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. Le problème de définition de g provient du fait que g est définie deux fois en x_k , $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En effet, on a

$$g(x_k) = S_k(x_k) \text{ et } g(x_k) = S_{k+1}(x_k).$$

Or par construction des S_k , on a $S_k(x_k) = S_{k+1}(x_k) = f_k$ et donc la fonction g est bien définie sur $[a, b]$.

2. Par construction, sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, la fonction g est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3. Pour quelle soit un spline cubique, il reste à démontrer qu'elle est deux fois continûment différentiable sur $[a, b]$. Il suffit pour cela de vérifier qu'en chaque point x_k , $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la fonction g est continue et admet des dérivées premières et secondes.

La continuité est immédiate puisque $g(x_k) = f_k$. Pour les dérivées premières et secondes, il faut que leurs limites à gauche et à droite soient égales, c'est à dire

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, S_k'(x_k) = S_{k+1}'(x_k) \text{ et } S_k''(x_k) = S_{k+1}''(x_k).$$

Par construction des S_k , la seconde équation est immédiate : $S_k''(x_k) = S_{k+1}''(x_k) = m_k$. On a $S_k'(x) = -3a_k(x_k - x)^2 + 3b_k(x - x_{k-1})^2 - \alpha_k + \beta_k$ et donc

$$S_k'(x_k) = 3b_k h^2 - \alpha_k + \beta_k = \frac{h}{2}m_k + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h}{6}(m_k - m_{k-1})$$

De même, on obtient

$$S_{k+1}'(x_k) = -3a_{k+1}h^2 - \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = -\frac{h}{2}m_k + \frac{1}{h}(f_{k+1} - f_k) - \frac{h}{6}(m_{k+1} - m_k)$$

Donc g sera dérivable en x_k si $S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k)$, c'est à dire si

$$\frac{h}{2}m_k + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h}{6}(m_k - m_{k-1}) = -\frac{h}{2}m_k + \frac{1}{h}(f_{k+1} - f_k) - \frac{h}{6}(m_{k+1} - m_k)$$

ce qui s'écrit encore, $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$m_{k+1} + 4m_k + m_{k-1} = \frac{6}{h^2}(f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1})$$

Q. 4 1. La condition $g''(a) = 0$ se traduit par $S''_1(x_0) = 0$ or par (2.4c) avec $k = 1$ on a $S''_1(x_0) = m_0$ d'où $m_0 = 0$.

La condition $g''(b) = 0$ se traduit par $S''_n(x_n) = 0$ or par (2.4d) avec $k = n$ on a $S''_n(x_n) = m_n$ d'où $m_n = 0$.
Pour déterminer les m_k , $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $n + 1$ équations linéaires qui s'écrivent sous la forme matricielle $\mathbb{A}\mathbf{M} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice \mathbb{A} est à diagonale strictement dominante : elle est donc inversible. ■

◇

EXERCICE 3 (6 pts)

Soient $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ et H un réel strictement positif et $h \in]0, H]$. On note D_h l'opérateur défini par

$$D_h f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2). \quad (3.1)$$

Q. 1 Montrer que l'opérateur D_h est linéaire. ■

Q. 2 Montrer qu'il existe $\xi_+ \in [x, x + h/2]$, $\xi_- \in [x - h/2, x]$ tels que

$$\frac{D_h f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{24}h^2 + \frac{f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)}{5!2^5}h^4. \quad (3.2)$$

Q. 3 1. En déduire l'expression de $f'(x)$ en fonction de $D_{h/2} f(x)$ et $D_h f(x)$ avec un reste qui s'écrit sous la forme $C_h h^4$ où C_h dépend de la dérivée cinquième de f .

2. Montrer que l'on a

$$\left| f'(x) - \frac{8f(x + h/4) - 8f(x - h/4) - f(x + h/2) + f(x - h/2)}{3h} \right| \leq C h^4 \quad (3.3)$$

où C dépend uniquement de la dérivée cinquième de f , de x et de H . ■

Correction



Théorème de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$. $\forall t \in]a, b]$, $\exists \xi \in]a, t[$ tel que

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (3.4)$$

On note \mathcal{E} l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles.

Q. 1 On a alors

$$\begin{cases} D_h & : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & f & \longmapsto & D_h f \end{cases}$$

avec $\forall x \in \mathbb{R} \ D_h f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2)$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{E}^2$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_h(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x + h/2) - (\lambda f + \mu g)(x - h/2) \\ &= \lambda f(x + h/2) + \mu g(x + h/2) - \lambda f(x - h/2) - \mu g(x - h/2) \text{ car } \mathcal{E} \text{ est un E.V.} \\ &= \lambda(f(x + h/2) - f(x - h/2)) + \mu(g(x + h/2) - g(x - h/2)) \\ &= \lambda D_h f(x) + \mu D_h g(x). \end{aligned}$$

Donc $D_h(\lambda f + \mu g) = \lambda D_h f + \mu D_h g$: l'opérateur D_h est bien linéaire. ■

Q. 2 On applique le théorème de Taylor-Lagrange : $\exists \xi_+ \in]x, x + h/2[$, tel que

$$f(x + h/2) = f(x) + \frac{h}{2} f^{(1)}(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2!} + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^{(4)}(x)}{4!} + \left(\frac{h}{2}\right)^5 \frac{f^{(5)}(\xi_+)}{5!} \quad (3.5)$$

De même, $\exists \xi_- \in]x - h/2, x[$, tel que

$$f(x - h/2) = f(x) - \frac{h}{2} f^{(1)}(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2!} - \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^{(4)}(x)}{4!} - \left(\frac{h}{2}\right)^5 \frac{f^{(5)}(\xi_-)}{5!} \quad (3.6)$$

En soustrayant (3.6) à (3.5), on obtient

$$f(x + h/2) - f(x - h/2) = h f^{(1)}(x) + 2 \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \left(\frac{h}{2}\right)^5 \frac{1}{5!} (f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)) \quad (3.7)$$

ce qui donne

$$\frac{D_h f(x)}{h} = f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{24} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{2^5 5!} (f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)) \quad (3.8)$$

Q. 3 1. De l'égalité (3.8), on obtient $\exists \xi'_+ \in]x, x + h/4[$, et $\exists \xi'_- \in]x - h/4, x[$, tel

$$\frac{D_{h/2} f(x)}{h/2} = f^{(1)}(x) + \frac{(h/2)^2}{24} f^{(3)}(x) + \frac{(h/2)^4}{2^5 5!} (f^{(5)}(\xi'_+) + f^{(5)}(\xi'_-)) \quad (3.9)$$

En soustrayant 4 fois (3.9) à (3.8) on obtient

$$\frac{D_h f(x)}{h} - 4 \frac{D_{h/2} f(x)}{h/2} = -3f^{(1)}(x) + \frac{h^4}{2^5 5!} (f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-)) - 4 \frac{(h/2)^4}{2^5 5!} (f^{(5)}(\xi'_+) + f^{(5)}(\xi'_-))$$

c'est à dire

$$\frac{D_h f(x) - 8 D_{h/2} f(x)}{h} = -3f^{(1)}(x) + \frac{h^4}{2^5 5!} \left(f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-) - \frac{1}{4} (f^{(5)}(\xi'_+) + f^{(5)}(\xi'_-)) \right).$$

On en déduit

$$f^{(1)}(x) = \frac{8 D_{h/2} f(x) - D_h f(x)}{3h} + \frac{h^4}{3 \times 2^5 5!} \left(f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-) - \frac{1}{4} (f^{(5)}(\xi'_+) + f^{(5)}(\xi'_-)) \right). \quad (3.10)$$

2. A partir de (3.9) et en utilisant

$$8 D_{h/2} f(x) - D_h f(x) = 8f(x + h/4) - 8 + f(x - h/4) - f(x + h/2) + f(x - h/2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} E(f) &= \left| f^{(1)}(x) - \frac{8f(x + h/4) - 8 + f(x - h/4) - f(x + h/2) + f(x - h/2)}{3h} \right| \\ &\leq \frac{h^4}{3 \times 2^5 5!} \left| f^{(5)}(\xi_+) + f^{(5)}(\xi_-) - \frac{1}{4} (f^{(5)}(\xi'_+) + f^{(5)}(\xi'_-)) \right| \\ &\leq \frac{h^4}{3 \times 2^4 5!} (1 + 1/4) \max_{t \in [x - h/2, x + h/2]} |f^{(5)}(t)| \\ &\leq \frac{h^4}{3 \times 2^4 5!} (1 + 1/4) \max_{t \in [x - H/2, x + H/2]} |f^{(5)}(t)|. \end{aligned}$$

EXERCICE 4 (10 pts)

Q. 1 1. Déterminer α, β et γ pour que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) \tag{4.1}$$

soit au moins d'ordre 2.

2. Montrer que cette formule est au plus d'ordre 3. ■

On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$, et on note $\mu = f'(0)$.

Q. 2 1. Etablir qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 tel que $P(-1) = f(-1), P(0) = f(0), P(1) = f(1)$ et $P'(0) = \mu$.

2. Montrer que quelque soit $x \in [-1; 1]$ il existe $\xi_x \in]-1; 1[$ tel que

$$f(x) = P(x) + \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!} f^{(4)}(\xi_x). \tag{4.2}$$

Indication : On peut étudier les zéros de la fonction $\varphi : t \mapsto (f(t) - P(t)) - (f(x) - P(x)) \frac{(t+1)t^2(t-1)}{(x+1)x^2(x-1)}$.

3. En déduire qu'il existe une constante M dépendant de $f^{(4)}$ telle que

$$\left| \int_{-1}^1 f(x)dx - (\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)) \right| \leq \frac{M}{90}. \tag{4.3}$$

Q. 3 Soient $c \in \mathbb{R}, h > 0$ et $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h], \mathbb{R})$.

1. Déduire de (4.1) une formule de quadrature pour le calcul de $\int_c^{c+h} g(t)dt$.

2. Montrer que l'erreur de quadrature est majorée par $\frac{\mathcal{M}}{2880} h^5$ où l'on déterminera la constante \mathcal{M} . ■

Q. 4 Soit $(x_k)_{k \in [0, n]}$ une discrétisation régulière¹ de l'intervalle $[a, b]$. Soit $v \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{R})$.

1. A partir de (4.1), expliciter la formule **composite** associée permettant d'approcher $\int_a^b v(s)ds$ et utilisant la discrétisation $(x_k)_{k \in [0, n]}$.

2. Calculer son erreur de quadrature. ■

Correction

Q. 1 1. La formule de quadrature (4.1) est au moins d'ordre 2 si et seulement si elle est exacte pour $f(x) = 1, f(x) = x$ et $f(x) = x^2$, c'est-à-dire si:

$$\int_{-1}^1 1dx = \alpha + \beta + \gamma, \quad \int_{-1}^1 xdx = -\alpha + \gamma, \quad \int_{-1}^1 x^2dx = \alpha + \gamma,$$

ce qui équivaut au système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 2, \\ -\alpha + \gamma & = & 0, \\ \alpha + \gamma & = & \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système a une unique solution : $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.

¹ $x_0 = a, x_n = b$ et $x_{k+1} = x_k + h$ avec h pas constant

2. Montrons que cette formule est d'ordre 3. On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^3 dx &= \frac{1}{3} \times (-1)^3 + \frac{1}{3} \times (1)^3, \\ \int_{-1}^1 x^4 dx &\neq \frac{1}{3} \times (-1)^4 + \frac{1}{3} \times (1)^4, \end{aligned}$$

donc la formule de quadrature (4.1) avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et n'est plus exacte pour les polynômes de degré 4, elle est donc d'ordre 3. ■

Q. 2 1. Trouver P de degré 3 tel que

$$\begin{cases} P(-1) = f(-1) \\ P(0) = f(0) \\ P(1) = f(1) \\ P'(0) = \nu \end{cases} \quad (4.4)$$

équivalent à trouver a, b, c, d tels que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vérifie (4.4). Il s'agit d'un système carré d'ordre 4, il suffit donc de montrer l'unicité : soient P et Q deux polynômes de degré 3 vérifiant (4.4). Alors le polynôme E défini par $E = P - Q$ est de degré 3 et vérifie

$$\begin{cases} E(-1) = 0 \\ E(0) = 0 \\ E(1) = 0 \\ E'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

En écrivant E sous la forme $E(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$, les deuxième et quatrième équations de (4.5) donnent $d_1 = c_1 = 0$, puis les première et troisième équations de (4.5) donnent $a_1 = b_1 = 0$, d'où $E = 0$ et donc $P = Q$ ce qui donne l'unicité de P (et donc aussi l'existence, puisqu'on a un système carré).

2. Soit $x \in [-1; 1]$, avec x différent de $-1, 0, 1$. Considérons la fonction

$$\varphi : t \mapsto (f(t) - P(t)) - (f(x) - P(x)) \frac{(t+1)t^2(t-1)}{(x+1)x^2(x-1)}.$$

Cette fonction s'annule aux points $-1, 0, 1$ et x . Par le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en trois points distincts de $-1, 0, 1, x$, mais elle s'annule aussi au point 0. En appliquant trois fois le théorème de Rolle à cette dérivée, on obtient l'existence d'un point $\xi_x \in]-1; 1[$ tel que

$$\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0.$$

La dérivée quatrième de P est nulle et celle de $t \mapsto (t+1)t^2(t-1)$ vaut $4!$. On en déduit que

$$0 = \varphi^{(4)}(\xi_x) = f^{(4)}(\xi_x) - (f(x) - P(x)) + \frac{4!}{(x+1)x^2(x-1)},$$

ce qui implique (4.2).

3. Comme $f \in C^4([-1, 1], \mathbb{R})$, on pose $M = \sup_{\xi \in [-1, 1]} |f^{(4)}(\xi)|$. Alors (4.2) implique

$$\left| \int_{-1}^1 (f(x) - P(x)) dx \right| \leq M \left| \int_{-1}^1 \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!} dx \right|,$$

d'où

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 P(x) dx \right| \leq \frac{M}{90}.$$

Or la formule de quadrature (4.1) est d'ordre 3, et $P \in \mathbb{R}^3[X]$, elle est donc exacte pour P . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \frac{1}{3}P(-1) + \frac{4}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1) \\ &= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \left(\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \right) \right| \leq \frac{M}{90}. \quad (4.6)$$

Q. 3 1. En effectuant le changement de variable $t = u(x) = \frac{h}{2}x + c + \frac{h}{2}$ et en posant $f = g \circ u$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_c^{c+h} g(t)dt &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 g \circ u(x)dx \\ &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{2} \left(\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \right), \text{ d'après (4.1)} \\ &\approx \frac{h}{6} \left(g(c) + 4g\left(c + \frac{h}{2}\right) + g(c+h) \right). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} E(g) &= \left| \int_c^{c+h} g(t)dt - \frac{h}{6} \left(g(c) + 4g\left(c + \frac{h}{2}\right) + g(c+h) \right) \right| \\ &= \left| \frac{h}{2} \int_{-1}^1 g \circ u(x)dx - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \right) \right| \\ &= \frac{h}{2} \left| \int_{-1}^1 f(x)dx - \left(\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \right) \right| \end{aligned}$$

Comme $f = g \circ u \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$, car $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h], \mathbb{R})$ on peut appliquer (4.6) pour obtenir

$$E(g) \leq \frac{h}{2} \frac{1}{90} \sup_{\xi \in [-1, 1]} |f^{(4)}(\xi)|.$$

De plus on a par dérivations successives $f^{(1)}(x) = \frac{h}{2}g^{(1)}(t)$, $f^{(2)}(x) = \left(\frac{h}{2}\right)^2 g^{(2)}(t)$, $f^{(3)}(x) = \left(\frac{h}{2}\right)^3 g^{(3)}(t)$ et enfin $f^{(4)}(x) = \left(\frac{h}{2}\right)^4 g^{(4)}(t)$. L'erreur de quadrature est donc majorée par

$$\begin{aligned} E(g) &\leq \frac{h}{2} \frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \sup_{t \in [c, c+h]} |g^{(4)}(t)| \\ &\leq \frac{h^5}{2880} \mathcal{M} \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec $\mathcal{M} = \sup_{t \in [c, c+h]} |g^{(4)}(t)|$. ■

Q. 4 1. Par la relation de Chasles, on obtient

$$\int_a^b v(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_k+h} v(s)ds,$$

D'après la question précédente avec $c = x_k$ et $f = v$, on a

$$\int_{x_k}^{x_k+h} v(s)ds \approx \frac{h}{6} \left(v(x_k) + 4v\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + v(x_k+h) \right).$$

Ainsi on obtient la formule de quadrature composite suivante:

$$\int_a^b v(s)ds \approx \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(v(x_k) + 4v\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + v(x_{k+1}) \right).$$

2. D'après (4.7), on a

$$\left| \int_{x_k}^{x_k+h} v(s)ds - \frac{h}{6} \left(v(x_k) + 4v\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + v(x_k+h) \right) \right| \leq \frac{h^5}{2880} \mathcal{M}_k \tag{4.8}$$

avec $\mathcal{M}_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |v^{(4)}(x)|$. L'erreur de quadrature $E(v)$ est donnée par

$$\begin{aligned} E(v) &= \left| \int_a^b v(s) ds - \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(v(x_k) + 4v(x_k + \frac{h}{2}) + v(x_{k+1}) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(s) ds - \frac{h}{6} \left(v(x_k) + 4v(x_k + \frac{h}{2}) + v(x_{k+1}) \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(s) ds - \frac{h}{6} \left(v(x_k) + 4v(x_k + \frac{h}{2}) + v(x_{k+1}) \right) \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'inéquation (4.8), et en notant $\bar{\mathcal{M}} = \sup_{x \in [a, b]} |v^{(4)}(x)|$ on obtient

$$\begin{aligned} E(v) &\leq \frac{h^5}{2880} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_k \\ &\leq \frac{h^5}{2880} n \bar{\mathcal{M}} \\ &\leq \frac{h^4}{2880} (b-a) \bar{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

■

◇