

PARTIEL DU 5 NOVEMBRE 2013
durée : 3h.

Sans document ni calculatrice, une feuille (recto seul) manuscrite de notes personnelles est autorisée.
Tous les calculs doivent être justifiés.

EXERCICE 1 (6 pts)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. On note $B = I - M^{-1}A$.

Q. 1 Montrer que la matrice $M^* + N$ est hermitienne. ■

On suppose maintenant que $M^* + N$ est définie positive.

Q. 2 Soit x un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n et $y = Bx$.

1. Montrer que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle x, AM^{-1}Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle \quad (1.1)$$

et

$$x - y = M^{-1}Ax. \quad (1.2)$$

2. En déduire que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle (x - y), (M^* + N)(x - y) \rangle. \quad (1.3)$$

Q. 3 Montrer que si A est définie positive alors $\rho(B) < 1$. ■

Q. 4 Montrer que si $\rho(B) < 1$ alors A est définie positive.

Indication : On pourra effectuer une preuve par l'absurde dans laquelle on définira la suite $x_n = Bx_{n-1}$ avec un x_0 judicieusement choisi de sorte que la suite $\alpha_n = \langle x_n, Ax_n \rangle$ soit strictement décroissante avec $\alpha_0 \leq 0$. ■

Correction

Q. 1 On a

$$\begin{aligned} (M^* + N)^* &= M + N^* \\ &= A + N + N^* \quad \text{car } M = A + N \\ &= A^* + N^* + N \quad \text{car } A \text{ hermitienne} \\ &= (A + N)^* + N \\ &= M^* + N. \end{aligned}$$

La matrice $M^* + N$ est donc hermitienne. ■

Q. 2 1. Par définition $B = I - M^{-1}A$, ce qui donne

$$y = Bx = (I - M^{-1}A)x = x - M^{-1}Ax$$

et donc (1.2) est démontré.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle y, Ay \rangle &= \langle x - M^{-1}Ax, A(x - M^{-1}Ax) \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle - \langle x, AM^{-1}Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle \end{aligned}$$

et donc (1.1) est démontré.

2. En utilisant (1.2) et $\mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A}$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{M} - \mathbb{A})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \underbrace{\mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}}_{=\mathbb{I}}\mathbb{A}\mathbf{x} \right\rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{x}, (\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A})^*\mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}^*(\mathbb{M}^{-1})^*\mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \text{ car } \mathbb{A} \text{ hermitienne et } (\mathbb{M}^{-1})^*\mathbb{M}^* = (\mathbb{M}^*)^{-1}\mathbb{M}^* = \mathbb{I}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle$$

et démontre (1.3). \blacksquare

Q. 3 Soit (λ, \mathbf{x}) un élément propre de \mathbb{B} avec $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$: on a donc $\mathbb{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Pour montrer que $\rho(\mathbb{B}) < 1$ il suffit alors de vérifier que $|\lambda| < 1$.

On a $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ et donc $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \lambda)\mathbf{x}$. En utilisant (1.3) on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbb{A}\lambda\mathbf{x} \rangle &= \langle (1 - \lambda)\mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(1 - \lambda)\mathbf{x} \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \lambda\bar{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle &= (1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda})\langle \mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{x} \rangle\end{aligned}$$

On a donc

$$(1 - |\lambda|^2)\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = |1 - \lambda|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{x} \rangle \quad (1.4)$$

Comme $\mathbf{x} \neq 0$, \mathbb{A} et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ sont définies positives on déduit de (1.4) que $1 - |\lambda|^2 \geq 0$ et donc $|\lambda| \leq 1$.

Il reste à montrer que $|\lambda| \neq 1$. Par un raisonnement par l'absurde, on suppose $|\lambda| = 1$, alors d'après (1.4) on a

$$|1 - \lambda|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{x} \rangle = 0.$$

Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive et $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit que $|1 - \lambda| = 0$ et donc $\lambda = 1$.

Dans ce cas, on obtient $\mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Comme $\mathbb{B}\mathbf{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A})\mathbf{x}$ on abouti à $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} = 0$ ce qui est impossible car \mathbb{M}^{-1} et \mathbb{A} sont inversible et $\mathbf{x} \neq 0$.

On a donc démontré que $|\lambda| \neq 1$ et comme $|\lambda| \leq 1$ on obtient $|\lambda| < 1$. \blacksquare

Q. 4 On a par hypothèse $\rho(\mathbb{B}) < 1$. On va démontrer que la matrice hermitienne \mathbb{A} est définie positive. Pour cela, on suppose que \mathbb{A} n'est pas définie positive :

$$\exists \mathbf{x}^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \text{ tel que } \langle \mathbb{A}\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \rangle \leq 0. \quad (1.5)$$

On pose alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbb{B}\mathbf{x}^k$ et $\alpha_k = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle$.

On a donc $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbb{B}^{k+1}\mathbf{x}^0$. On sait que

$$\rho(\mathbb{B}) < 1 \Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0.$$

On en déduit alors que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\alpha_k| = |\langle \mathbb{A}\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k \rangle| \underset{C.S.}{\leq} \|\mathbb{A}\mathbf{x}^k\|_2 \|\mathbf{x}^k\|_2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (1.6)$$

On va maintenant étudier la monotonie de la suite α_k . En utilisant (1.3) avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1}$ on a

$$\langle \mathbf{x}^k, \mathbb{A}\mathbf{x}^k \rangle - \langle \mathbf{x}^{k+1}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{k+1} \rangle = \langle (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}) \rangle$$

c'est à dire

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \langle (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}) \rangle. \quad (1.7)$$

De plus, on a $\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1} \neq 0$ car sinon $\mathbf{x}^k = \mathbb{B}\mathbf{x}^k$ et 1 serait valeur propre de \mathbb{B} ce qui est impossible car $\rho(\mathbb{B}) < 1$. En utilisant le caractère défini positif de la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ dans (1.7) on obtient $\alpha_k - \alpha_{k+1} > 0$ et donc la suite (α_k) est strictement décroissante.

On vient de montrer que la suite (α_k) est strictement décroissante et converge vers 0. Son premier terme $\alpha_0 = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \rangle$ ne peut donc être négatif ou nul : contradiction avec (1.5). \blacksquare

EXERCICE 2 (6 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On définit $\mathbb{A}^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathbb{A}^{(1)} = -2$ pour $n = 1$, et par $\mathbb{A}^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$, pour $n \geq 2$, avec

$$\begin{aligned} a_{i,i+1}^{(n)} = a_{i+1,i}^{(n)} &= 1, & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ a_{ii}^{(n)} &= -2, & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ a_{ij}^{(n)} &= 0, & \text{sinon.} \end{aligned}$$

On note $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$.

Q. 1 Montrer que

$$P_n(\lambda) = -(\lambda + 2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda). \tag{2.1}$$

■

Q. 2 En effectuant le changement de variable $\lambda + 2 = -2 \cos \theta$ établir (par récurrence sur n) que

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}. \tag{2.2}$$

■

Q. 3 En déduire les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$. ■

Q. 4 La matrice définie par $\mathbb{B} = -\mathbb{A}$ est-elle définie positive? Justifier. ■

Correction

Q. 1 Montrons que

$$P_n(\lambda) = -(\lambda + 2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda), \quad \forall n \geq 3.$$

On note $\mathbb{I}^{(n)}$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a, par définition du polynôme caractéristique,

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det(\mathbb{A}^{(n)} - \lambda \mathbb{I}^{(n)}) \\ &= \det \left(\begin{array}{cccccc} -(\lambda + 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & -(\lambda + 2) & 1 & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda + 2) & \end{array} \right)_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= (-1)^{1+1} \times (-\lambda + 2) \times \det \left(\begin{array}{cccccc} -(\lambda + 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & -(\lambda + 2) & 1 & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda + 2) & \end{array} \right)_{\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} \\ &\quad + (-1)^{2+1} \times 1 \times \det \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & -(\lambda + 2) & 1 & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda + 2) & \end{array} \right)_{\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\det \begin{pmatrix} -(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2) \end{pmatrix}_{\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} = \det \left(\mathbb{A}^{(n-1)} - \lambda \mathbb{I}^{(n-1)} \right) = P_{n-1}(\lambda)$$

et, en développant par rapport à la première ligne

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2) \end{pmatrix}_{\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} = \det \begin{pmatrix} -(\lambda+2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(\lambda+2) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\lambda+2) \end{pmatrix}_{\in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})} \\ = P_{n-2}(\lambda). \quad \blacksquare$$

Ce qui donne

$$P_n(\lambda) = -(\lambda+2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda).$$

Q. 2 On va démontrer la formule (2.2) par récurrence sur n .

On vérifie tout d'abord la validité de la formule au rang $n = 1$. On a

$$P_1(\lambda) = \det \left(\mathbb{A}^{(1)} - \lambda \mathbb{I}^{(1)} \right) = -(\lambda+2).$$

Avec le changement de variable $\lambda + 2 = -2 \cos \theta$, on obtient

$$P_1(\lambda) = 2 \cos \theta$$

or $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$ d'où

$$P_1(\lambda) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}.$$

La formule (2.2) est donc vraie au rang $n = 1$.

Pour mieux comprendre la démonstration, on peut aussi vérifier la formule au rang $n = 2$. On a

$$P_2(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda+3) \\ &= ((\lambda+2)-1)((\lambda+2)+1) \\ &= \left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} - 1 \right) \left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} \right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{\sin(3\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

La formule (2.2) est donc vraie au rang $n = 2$.

On suppose la formule (2.2) vraie **jusqu'au** rang $n - 1$, $n \geq 3$. L'hypothèse de récurrence forte est la suivante, $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$,

$$(\mathcal{H}_k) : P_k(\lambda) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}$$

On va démontrer que (\mathcal{H}_n) est vraie. On a

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= -(\lambda + 2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \\ &= \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin \theta} \quad (\text{on utilise } (\mathcal{H}_{n-1}) \text{ et } (\mathcal{H}_{n-2})) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} [\sin(2\theta) \sin(n\theta) - \sin \theta \sin((n-1)\theta)] \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 \left[(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) - (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}) \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 \left[e^{i(n+2)\theta} - e^{i(n-2)\theta} - e^{-i(n-2)\theta} + e^{-i(n+2)\theta} \right. \\ &\quad \left. - (+e^{in\theta} - e^{i(n-2)\theta} - e^{i(n-2)\theta} + e^{-in\theta}) \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 \left[e^{i(n+2)\theta} + e^{-i(n+2)\theta} - e^{in\theta} - e^{-in\theta} \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2i} \right)^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}) \\ &= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que (\mathcal{H}_n) est vraie. Ce qui achève la démonstration par récurrence de la formule (2.2). ■

Q. 3 Les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$ sont les racines de son polynôme caractéristique P_n . Or ce polynôme s'annule lorsque $\sin \theta \neq 0$ et $\sin((n+1)\theta) = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \theta \neq k'\pi, & k' \in \mathbb{Z} \\ (n+1)\theta = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On obtient donc

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}[\pi], \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Les n valeurs propres distinctes de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$ sont donc

$$\lambda_k = -2(1 + \cos(\theta_k)) = -2 \left(1 + \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right), \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad \blacksquare$$

Q. 4 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a :

$$\begin{cases} (\mathbb{B}\mathbf{x})_1 &= 2x_1 - x_2, \\ (\mathbb{B}\mathbf{x})_i &= -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}, \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\}, \\ (\mathbb{B}\mathbf{x})_n &= -x_{n-1} + 2x_n, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_n^2 - x_nx_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} (-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1})x_i \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_n^2 - x_nx_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_{i-1}x_i + 2 \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_n^2 - x_nx_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_{i-1}x_i + 2 \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=3}^n x_{i-1}x_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i. \end{aligned}$$

De plus on a $(x_i - x_{i-1})^2 = x_i^2 + x_{i-1}^2 - 2x_i x_{i-1}$ et donc $-2x_i x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2$. En remplaçant cette dernière expression dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n ((x_i - x_{i-1})^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right) + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par l'absurde, on va démontrer que $\langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$. Supposons que $\langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ alors $x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 = 0$, et donc $x_1^2 = x_n^2 = 0$ et $(x_i - x_{i-1})^2 = 0, \forall i \in \{2, \dots, n\}$. On en déduit donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ce qui entre en contradiction avec $\mathbf{x} \neq 0$.

On vient de démontrer que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0.$$

La matrice \mathbb{B} est donc définie positive. ▪

◇

PROBLÈME 3 (11 pts)

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel des matrices carrées de dimension n à coefficients dans \mathbb{C} .

Q. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Montrer que si \mathbb{A} est définie positive alors toutes ses valeurs propres sont réelles strictement positives. La réciproque est-elle vraie? Justifier. ▪

Q. 2 Soit \mathbb{D} une matrice diagonale hermitienne définie positive :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale \mathbb{S} hermitienne définie positive telle que $\mathbb{D} = \mathbb{S}^2$. Donner explicitement \mathbb{S} . ▪

On veut maintenant montrer que la racine carrée de \mathbb{D} est unique.

On admet dans la suite qu'une matrice hermitienne définie positive \mathbb{F} peut s'écrire sous la forme $\mathbb{F} = \mathbb{L}\mathbb{L}^*$ où \mathbb{L} est une matrice triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Q. 3 Soit \mathbb{K} une matrice hermitienne (non nécessairement diagonale) définie positive telle que $\mathbb{D} = \mathbb{K}^2$.

1. Montrer qu'il existe une matrice \mathbb{B} triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{K}^* \mathbb{K} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

2. En déduire que \mathbb{K} s'écrit sous la forme $\mathbb{K} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec \mathbb{R} triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs et \mathbb{Q} unitaire. ▪

Q. 4 Montrer que $\mathbb{R}^* \mathbb{R} = \mathbb{D}$. En déduire que $\mathbb{R} = \mathbb{S}$. ▪

Q. 5 Montrer que toutes les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1. ▪

Q. 6 Montrer que toutes les valeurs propres de \mathbb{Q} sont égales à 1. ▪

Q. 7 En déduire qu'il existe une unique matrice hermitienne définie positive \mathbb{K} telle que $\mathbb{D} = \mathbb{K}^2$. ■

Q. 8 Soit maintenant \mathbb{A} une matrice hermitienne définie positive quelconque.

Montrer qu'il existe une matrice hermitienne définie positive \mathbb{H} telle que $\mathbb{A} = \mathbb{H}^2$ et qu'une telle matrice est unique. ■

Correction

Q. 1 Soit A une matrice hermitienne définie positive. Soit λ une valeur propre de A , x un vecteur propre associé :

$$Ax = \lambda x, x \neq 0.$$

Prenons le produit scalaire avec x :

$$x^* Ax = \lambda x^* x = \lambda \|x\|_2^2$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Puisque A est définie positive, $x^* Ax$ est strictement positif, et donc λ est strictement positif. Réciproquement, A étant hermitienne, il existe une base orthogonale $\{u_i\}$ de vecteurs propres de A . Pour $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, on a $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ et $x^* Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 u_i^* A u_i > 0$, donc A est définie positive. ■

Q. 2 Puisque \mathbb{D} est hermitienne définie positive, les λ_i sont tous strictement positifs. Il est donc clair que la matrice \mathbb{S} donnée par

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

est solution du problème. D'autre part toute matrice \mathbb{S} diagonale hermitienne définie positive telle que $\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}$ doit vérifier $s_{ii} > 0$ et $s_{ii}^2 = \lambda_i$. Elle est donc égale à la précédente, et on a

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Q. 3 1. $\mathbb{K}^* \mathbb{K} = \mathbb{D}$ est une matrice hermitienne définie positive. D'après l'hypothèse de l'énoncé elle admet donc une décomposition

$$\mathbb{K}^* \mathbb{K} = \mathbb{B} \mathbb{B}^*$$

où \mathbb{B} est triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs.

2. Alors on peut écrire $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \mathbb{R}$ avec $\mathbb{R} = \mathbb{B}^*$ et $\mathbb{Q} = (\mathbb{K}^*)^{-1} \mathbb{B}$. \mathbb{R} est bien triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, et vérifions que \mathbb{Q} est unitaire :

$$\mathbb{Q} \mathbb{Q}^* = ((\mathbb{K}^*)^{-1} \mathbb{B})(\mathbb{B}^* \mathbb{K}^{-1}) = (\mathbb{K}^*)^{-1} (\mathbb{B} \mathbb{B}^*) \mathbb{K}^{-1} = (\mathbb{K}^*)^{-1} (\mathbb{K}^* \mathbb{K}) \mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$$

$$\mathbb{Q}^* \mathbb{Q} = (\mathbb{B}^* \mathbb{K}^{-1}) ((\mathbb{K}^*)^{-1} \mathbb{B}) = \mathbb{B}^* (\mathbb{K}^{-1} (\mathbb{K}^*)^{-1}) \mathbb{B} = \mathbb{B}^* (\mathbb{K}^* \mathbb{K})^{-1} \mathbb{B} = \mathbb{B}^* (\mathbb{B} \mathbb{B}^*)^{-1} \mathbb{B} = \mathbb{I}$$

Q. 4 On a la suite d'égalités

$$\mathbb{R}^* \mathbb{R} = \mathbb{B} \mathbb{B}^* = \mathbb{K}^* \mathbb{K} = \mathbb{K}^2 = \mathbb{D} = (\sqrt{\mathbb{D}})^2 = \mathbb{D}^* \mathbb{D},$$

d'où

$$(\mathbb{D}^*)^{-1} \mathbb{R}^* = \mathbb{D} \mathbb{R}^{-1}.$$

La matrice $(\mathbb{D}^*)^{-1} \mathbb{R}^*$ est triangulaire inférieure, la matrice $\mathbb{D} \mathbb{R}^{-1}$ est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont égales, elles sont donc toutes deux diagonales. La matrice \mathbb{R} est donc diagonale à éléments diagonaux positifs, son carré est la matrice \mathbb{D} . L'unicité démontrée à la question 2) prouve donc que $\mathbb{R} = \mathbb{S}$.

Q. 5 Soit \mathbb{S} une matrice unitaire, ω une valeur propre de \mathbb{S} , x un vecteur propre associé :

$$\mathbb{S}x = \omega x, x \neq 0$$

Prenons le conjugué de cette égalité :

$$x^* \mathbb{S}^* = \bar{\omega} x^*$$

et multiplions les terme à terme

$$x^* \mathbb{S}^* \mathbb{S} x = |\omega|^2 x^* x$$

et puisque $\mathbb{S}^* \mathbb{S} = \mathbb{I}$, il reste $|\omega|^2 = 1$.

Q. 6 Soit ω une valeur propre de \mathbb{Q} , x un vecteur propre associé :

$$\mathbb{Q}x = \omega x, x \neq 0$$

ou encore

$$\mathbb{K} \mathbb{R}^{-1} x = \omega x.$$

Ce qui se réécrit en posant $y = \mathbb{R}^{-1} x$

$$\mathbb{K} y = \omega \mathbb{R} y$$

Prenons le produit scalaire par y

$$y^* \mathbb{K} y = \omega y^* \mathbb{R} y$$

Les deux nombres $y^* \mathbb{K} y$ et $y^* \mathbb{R} y = y^* \sqrt{\mathbb{D}} y$ sont des réels strictement positifs, ω est donc un réel strictement positif. Comme il est de module 1 par la question précédente, ce ne peut être que 1 : toutes les valeurs propres de \mathbb{Q} sont égales à 1.

Q. 7 Puisque \mathbb{Q} est unitaire, elle diagonalise en base orthonormée : il existe une matrice unitaire \mathbb{U} telle que $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^* \mathbb{I} \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{U} = \mathbb{I}$. La matrice \mathbb{Q} est égale à l'identité et donc $\mathbb{K} = \mathbb{R} = \mathbb{S}$.

Si \mathbb{K} est une matrice hermitienne définie positive telle que $\mathbb{K}^2 = \mathbb{D}$, alors $\mathbb{K} = \mathbb{S}$. Ceci montre qu'il existe une et une seule matrice \mathbb{K} telle que $\mathbb{K}^2 = \mathbb{D}$, et cette matrice \mathbb{K} est la matrice \mathbb{S} définie à la question 2).

Q. 8 Soit maintenant \mathbb{A} une matrice hermitienne définie positive quelconque. Il existe une matrice unitaire \mathbb{U} est une matrice diagonale \mathbb{D} telles que $\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U}$. La matrice \mathbb{D} est hermitienne définie positive, et d'après la question précédente admet une racine carrée unique \mathbb{S} . On peut alors écrire

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{S} \mathbb{S} \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{S} \mathbb{U} \mathbb{U}^* \mathbb{S} \mathbb{U}$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{H}^2$ avec $\mathbb{H} = \mathbb{U}^* \mathbb{S} \mathbb{U}$. Ceci montre l'existence. Soit maintenant \mathbb{L} une matrice hermitienne définie positive telle que $\mathbb{L}^2 = \mathbb{A}$. On doit avoir

$$\mathbb{L}^2 = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U}$$

et donc

$$\mathbb{D} = \mathbb{U} \mathbb{L}^2 \mathbb{U}^* = \mathbb{U} \mathbb{L} \mathbb{U}^* \mathbb{U} \mathbb{L} \mathbb{U}^* = (\mathbb{U} \mathbb{L} \mathbb{U}^*)^2$$

La matrice $\mathbb{U} \mathbb{L} \mathbb{U}^*$ est hermitienne définie positive, son carré est égal à \mathbb{D} . Par le résultat d'unicité de la question 7), on a

$$\mathbb{U} \mathbb{L} \mathbb{U}^* = \mathbb{S}$$

et donc $\mathbb{L} = \mathbb{H}$. Il existe donc une et une seule matrice hermitienne définie positive telle que $\mathbb{L}^2 = \mathbb{A}$, et c'est la matrice $\mathbb{H} = \mathbb{U}^* \mathbb{S} \mathbb{U}$. ■

◇