

PARTIEL DU 5 NOVEMBRE 2013
durée : 3h.

Sans documents et sans calculatrice Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel des matrices carrées de dimension n à coefficients dans \mathbb{C} .

Q. 1 *Montrer que si \mathbb{A} est hermitienne définie positive, toutes ses valeurs propres sont réelles strictement positives.*

Q. 2 *Soit \mathbb{D} une matrice diagonale hermitienne définie positive :*

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale \mathbb{C} hermitienne définie positive telle que $\mathbb{D} = \mathbb{C}^2$. Donner explicitement \mathbb{C} .

On pose dans toute la suite $\sqrt{\mathbb{D}} = \mathbb{C}$.

On veut maintenant montrer que la racine carrée de \mathbb{D} est unique.

On admet qu'une matrice hermitienne définie positive \mathbb{F} peut s'écrire sous la forme $\mathbb{F} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où \mathbb{B} est une matrice triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Q. 3 *Soit \mathbb{K} une matrice hermitienne définie positive telle que $\mathbb{K}^2 = \mathbb{D}$.*

- 1. Montrer qu'il existe une matrice \mathbb{B} triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{K}^*\mathbb{K} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.*
- 2. En déduire que \mathbb{K} s'écrit sous la forme $\mathbb{K} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec \mathbb{R} triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs et \mathbb{Q} unitaire. ■*

Q. 4 *Montrer que $\mathbb{R}^*\mathbb{R} = \mathbb{D}$. En déduire que $\mathbb{R} = \sqrt{\mathbb{D}}$.*

Q. 5 *Montrer que toutes les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1.*

Q. 6 *Montrer que toutes les valeurs propres de \mathbb{Q} sont égales à 1 (on considèrera une valeur propre de \mathbb{Q} et un vecteur propre associé).*

Q. 7 *En déduire qu'il existe une unique matrice hermitienne définie positive \mathbb{K} telle que $\mathbb{K}^2 = \mathbb{D}$.*

Q. 8 *Soit maintenant \mathbb{P} une matrice hermitienne définie positive quelconque. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne définie positive \mathbb{H} telle que $\mathbb{H}^2 = \mathbb{P}$ et qu'une telle matrice est unique. ■*

EXERCICE 2

On définit $\mathbb{A}^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} a_{i,i+1}^{(n)} = a_{i+1,i}^{(n)} &= 1, & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ a_{ii}^{(n)} &= -2, & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ a_{ij}^{(n)} &= 0, & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Q. 1 On note $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbb{A}^{(n)}$

1. Montrer que

$$P_n(\lambda) = -(\lambda + 2)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \quad (2.1)$$

2. En effectuant le changement de variable $\lambda + 2 = -2 \cos \theta$ établir que

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}. \quad (2.2)$$

3. En déduire les valeurs propres de $\mathbb{A}^{(n)}$ ■

Soit \mathbb{I} la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère, dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$, les matrices blocs suivantes :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^{(n)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{I} & -2\mathbb{I} & \mathbb{I} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbb{I} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{I} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I} & -2\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Q. 2 On suppose que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\mathbb{A}^{(n)}$ sont toutes distinctes. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de \mathbb{B} et \mathbb{C} en fonction de ceux de $\mathbb{A}^{(n)}$ (sans calculer explicitement les espaces propres de $\mathbb{A}^{(n)}$). ■

EXERCICE 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où \mathbb{M} est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne. ■

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 Soit \mathbf{x} un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$.

1. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad (3.1)$$

et

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

2. En déduire que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle. \quad (3.3)$$
■

Q. 3 Montrer que si \mathbb{A} est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$. ■

Q. 4 Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbb{B}) < 1$ alors \mathbb{A} est définie positive. ■