

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier






Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2015/10/12

- Volume horaire : $10 \times 3\text{h}$ cours - $9 \times 3\text{h}$ TD,
- Prérequis des cours : *Equations différentielles* (L. Halpern), *Projets numériques*, *Elements Finis*, *Volumes Finis*, ...
- Note finale : $(P_1 + P_2 + CC_1 + CC_2)/4$ si possible.
 - ▶ P_1 partiel 5 ou 6ème séance de cours (2h00),
 - ▶ P_2 partiel du 4 janvier 2016 (2h00),
 - ▶ CC_1 contrôle continu par B. Delourme,
 - ▶ CC_2 contrôle continu par F. Cuvelier,

Outils de base de l'analyse numérique et du calcul scientifique.

- Mathématiques
- Numériques
- Algorithmique

-  P.G. Ciarlet, *Analyse numérique et equations différentielles*, DUNOD, 2006.
-  J.P. Demailly, *Analyse numérique et equations différentielles*, PUG, 1994.
-  W. Gander, M.J. Gander, and F. Kwok, *Scientific computing : an introduction using maple and matlab*, Springer, Cham, 2014.
-  T. Huckle, *Collection of software bugs*
<http://www.zenger.informatik.tu-muenchen.de/persons/huckle/bugse.html>.
-  P. Lascaux and R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, no. vol. 1, Dunod, 2004.

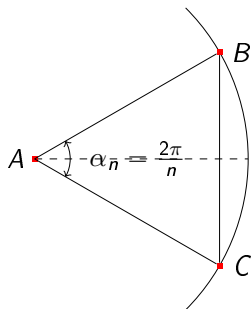


A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Méthodes Numériques: Algorithmes, analyse et applications (French Edition)*, 1 ed., Springer, September 2007.

Chapitre I

Erreurs : arrondis, bug and Co.

Un exemple : calcul approché de π



- Aire du cercle : $\mathcal{A} = \pi r^2$.
- Archimède vers 250 avant J-C :
 $\pi \in]3 + \frac{1}{7}, 3 + \frac{10}{71}[$ avec 96 polygônes.
- Algorithme polygônes inscrits ($r = 1$) :
 $\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \sin(\alpha_n)$ et
 $\sin \frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}}{2}}$.

1: $s \leftarrow 1, n \leftarrow 4$

▷ Initialisations

2: **Tantque** $s > 1e - 10$ **faire**

▷ Arrêt si $s = \sin(\alpha)$ est petit

3: $s \leftarrow \text{sqrt}((1 - \text{sqrt}(1 - s * s)))/2$

▷ nouvelle valeur de $\sin(\alpha/2)$

4: $n \leftarrow 2 * n$

▷ nouvelle valeur de n

5: $A \leftarrow (n/2) * s$

▷ nouvelle valeur de l'aire du polygône

6: **Fin Tantque**

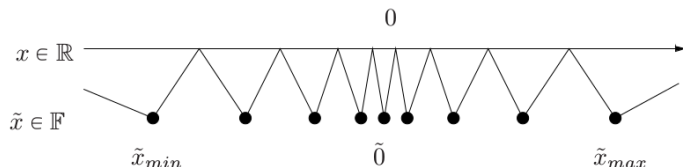
Un exemple : calcul approché de π

n	\mathcal{A}_n	$ \mathcal{A}_n - \pi $	$\sin(\alpha_n)$
4	2.0000000000000000	1.141593e+00	1.000000e+00
64	3.13654849054594	5.044163e-03	9.801714e-02
4096	3.14159142150464	1.232085e-06	1.533980e-03
32768	3.14159263346325	2.012654e-08	1.917476e-04
65536	3.14159265480759	1.217796e-09	9.587380e-05
131072	3.14159264532122	8.268578e-09	4.793690e-05
524288	3.14159291093967	2.573499e-07	1.198423e-05
4194304	3.14159655370482	3.900115e-06	1.498030e-06
67108864	3.14245127249413	8.586189e-04	9.365235e-08
2147483648	0.0000000000000000	3.141593e+00	0.000000e+00

Nombres flottants en machine

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \pm m \cdot b^e \\ m &= D.D \cdots D, \quad \text{mantisse} \\ e &= D \cdots D, \quad \text{exposant}\end{aligned}$$

où $D \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ représente un chiffre et b la base.
Mantisse normalisée : 1er D (avant point) est non nul.

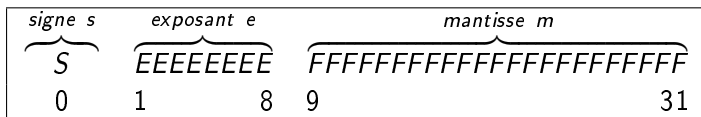


- **Précision machine** : plus petit nombre machine $\text{eps} > 0$ tel que $1 + \text{eps} > 1$.

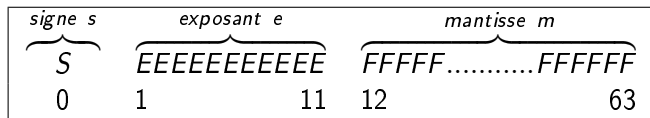
Matlab/Octave, langage C (double), ... : $\text{eps} = 2.220446049250313e - 16$

Système IEEE 754 (1985)

- **simple précision** : format 32 bits (4 octets), float en langage C.



- **double précision** : format 64 bits (8 octets), double en langage C.



dimension tableau	type	dimension (octets)	dimension total
1000×1000	float	4	$4 * 1000 * 1000 = 4Mo$
$10^4 \times 10^4$	float	4	$4 * 10^8 = 400Mo$
1000×1000	double	8	$8 * 1000 * 1000 = 8Mo$
$10^4 \times 10^4$	double	8	$8 * 10^8 = 800Mo$

En langage C (par ex.):

- `int a=2147483647,b;` alors `b=a+1;` donne `b==-2147483648,`
- `double a=1/2,b;b=a+1;` donne `a==0` et `b==1,`

En Matlab (par ex.) :

- `x=eps;` alors `1+eps==1` est faux (`false=0`)
- `x=eps/2;y=1;` alors `(y+x)+x==1` est vrai et `y+(x+x)==1` est faux.
`(x + y) + z = x + (y + z)` n'est pas forcément vérifiée sur machine!

Il faut être attentifs aux signes.

- $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}$, si $|x| \leq 0.5\sqrt{\text{eps}}$ alors $\sqrt{1-x^2} \equiv 1!$
 $\implies \bar{x} = 0.5\sqrt{\text{eps}}$, $\boxed{\frac{1}{1-\sqrt{1-\bar{x}^2}} \equiv +\infty}$

- $$f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$\implies \bar{x} = 0.5\sqrt{\text{eps}}$$
, $\boxed{\frac{1+\sqrt{1-\bar{x}^2}}{\bar{x}^2} \equiv 3.6029e+16}$

Erreurs d'annulation : calcul de π , le retour

$$\sin \frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_n}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}}{2}},$$

C'est le calcul de $1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}$ qui pose problème!

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}} \sin \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n})}}$$

- 1: $s \leftarrow 1, n \leftarrow 4,$ ▷ Initialisations
- 2: **Tantque** $s > 1e - 10$ **faire** ▷ Arrêt si $s = \sin(\alpha)$ est petit
- 3: $s \leftarrow s/\text{sqrt}(2 * (1 - \text{sqrt}(1 - s * s)))$ ▷ nouvelle valeur de $\sin(\alpha/2)$
- 4: $n \leftarrow 2 * n$ ▷ nouvelle valeur de n
- 5: $A \leftarrow (n/2) * s$ ▷ nouvelle valeur de l'aire du polygône
- 6: **Fin Tantque**

Un exemple : calcul approché de π

n	A_n	$ A_n - \pi $	$\sin(\alpha_n)$
4	2.0000000000000000	1.141593e+00	1.000000e+00
64	3.13654849054594	5.044163e-03	9.801714e-02
4096	3.14159142151120	1.232079e-06	1.533980e-03
32768	3.14159263433856	1.925123e-08	1.917476e-04
65536	3.14159264877699	4.812807e-09	9.587380e-05
131072	3.14159265238659	1.203202e-09	4.793690e-05
524288	3.14159265351459	7.519985e-11	1.198422e-05
4194304	3.14159265358862	1.174172e-12	1.498028e-06
67108864	3.14159265358979	3.552714e-15	9.362676e-08
2147483648	3.14159265358979	1.332268e-15	2.925836e-09

Mais avant de poursuivre ...



(a) Pont de la Basse-Chaine, Angers (1850)



(b) Takoma Narrows Bridge, Washington (1940)



(c) Millenium Bridge, London (2000)

Figure : Une histoire de ponts

Chapitre II

Langage algorithmique

- 1 Introduction
- 2 Pseudo-langage algorithmique
- 3 Méthodologie de construction
- 4 Pseudo-langage algorithmique (suite)

Definition 1.1: Petit Robert 97

Algorithmique : Enchaînement d'actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche.

Exemple 1 : permutation

Nous voulons permutter deux voitures sur un parking de trois places numérotées de 1 à 3 et ceci sans gêner la circulation.

La première voiture, une Saxo, est sur l'emplacement 2, la seconde, une Clio, est sur l'emplacement 3.

Donner un algorithme permettant de résoudre cette tâche.

Exemple 2 : équation du premier degré

Donner un algorithme permettant de résoudre

$$ax = b$$

Caractéristiques d'un *bon* algorithme

- Il ne souffre d'aucune ambiguïté \Rightarrow très clair.
- Combinaison d'opérations (actions) élémentaires.
- Pour toutes les données d'entrée, l'algorithme doit fournir un résultat en un nombre fini d'opérations.

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Etape 3 : Ecrire l'algorithme (par raffinement successif pour des algorithmes *compliqués*).

- 1 Introduction
- 2 Pseudo-langage algorithmique
 - Les bases
 - Les instructions structurées
- 3 Méthodologie de construction
- 4 Pseudo-langage algorithmique (suite)

- constantes, variables,
- opérateurs (arithmétiques, relationnels, logiques),
- expressions,
- instructions (simples et composées),
- fonctions.

- Donnée \Rightarrow introduite par l'utilisateur
- Constante \Rightarrow symbole, identificateur non modifiable

Definition 2.1

Une variable est un objet dont la valeur est modifiable, qui possède un nom et un type (entier, caractère, réel, complexe, tableau, matrice, vecteur...).

Nom	Symbole	Exemple
addition	+	$a + b$
soustraction	-	$a - b$
opposé	-	$-a$
produit	*	$a * b$
division	/	a/b

Nom	Symbole	Exemple
identique	$==$	$a == b$
différent	\neq	$a \neq b$
inférieur	$<$	$a < b$
supérieur	$>$	$a > b$
inférieur ou égal	\leq	$a \leq b$
supérieur ou égal	\geq	$a \geq b$

Nom	Symbole	Exemple
négation	\sim	$\sim a$
ou	$ $	$a b$
et	$\&$	$a\&b$

Opérateur d'affectation

Nom	Symbole	Exemple
affectation	\leftarrow	$a \leftarrow b$

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

♥ Definition 2.3

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c) / (2 * a)$$

♥ Definition 2.4

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c) / (2 * a)$$

Opérandes \Rightarrow identifiants a , b , c ,
constantes 4 et 2.

♥ Definition 2.5

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c) / (2 * a)$$

Opérandes \Rightarrow identifiants a, b, c ,
constantes 4 et 2.

Opérateurs \Rightarrow symboles $*$, $-$ et $/$

♥ Definition 2.6

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

♥ Definition 2.7

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes \Rightarrow identifiants x et constantes 3.14

♥ Definition 2.8

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes \Rightarrow identifiants x et constantes 3.14

Opérateurs \Rightarrow symboles $<$

Definition 2.9

Une **instruction** est un ordre ou un groupe d'ordres qui déclenche l'exécution de certaines actions par l'ordinateur. Il y a deux types d'instructions : simple et structuré.

- affectation d'une valeur a une variable.
- appel d'une fonction (procedure, subroutine, ... suivant les langages).

- 1 les instructions composées, groupe de plusieurs instructions simples,
- 2 les instructions répétitives, permettant l'exécution répétée d'instructions simples, (i.e. boucles «pour», «tant que»)
- 3 les instructions conditionnelles, lesquels ne sont exécutées que si une certaine condition est respectée (i.e. «si»)

Exemple : boucle «pour»

Données : n

1: $S \leftarrow 0$

2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à n faire

3: $S \leftarrow S + \cos(i^2)$

4: **Fin Pour**

Mais que fait-il?

Exemple : boucle «pour»

Données : n

- 1: $S \leftarrow 0$
- 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à n faire
- 3: $S \leftarrow S + \cos(i^2)$
- 4: **Fin Pour**

Mais que fait-il?

Calcul de $S = \sum_{i=1}^n \cos(i^2)$

Exemple : boucle «tant que»

```
1:  $i \leftarrow 0, x \leftarrow 1$   
2: Tantque  $i < 1000$  faire  
3:    $x \leftarrow x + i * i$   
4:    $i \leftarrow i + 1$   
5: Fin Tantque
```

Mais que fait-il?

Exemple : boucle «tant que»

```
1:  $i \leftarrow 0, x \leftarrow 1$   
2: Tantque  $i < 1000$  faire  
3:    $x \leftarrow x + i * i$   
4:    $i \leftarrow i + 1$   
5: Fin Tantque
```

Mais que fait-il?

Calcul de $x = 1 + \sum_{i=0}^{999} i^2$

Données :

age : un réel.

- 1: **Si** *age* \geq 18 **alors**
- 2: affiche('majeur')
- 3: **Sinon Si** *age* \geq 0 **alors**
- 4: affiche('mineur')
- 5: **Sinon**
- 6: affiche('en devenir')
- 7: **Fin Si**

- 1 Introduction
- 2 Pseudo-langage algorithmique
- 3 Méthodologie de construction
 - Principe
 - Exercices
- 4 Pseudo-langage algorithmique (suite)

Description du problème

- Spécification d'un ensemble de données
Origine : énoncé, hypothèses, sources externes, ...
- Spécification d'un ensemble de buts à atteindre
Origine : résultats, opérations à effectuer, ...
- Spécification des contraintes

- Clarifier l'énoncé.
- Simplifier le problème.
- Ne pas chercher à le traiter directement dans sa globalité.
- S'assurer que le problème est soluble (sinon problème d'indécidabilité!)
- Recherche d'une stratégie de construction de l'algorithme
- Décomposer le problème en sous problèmes partiels plus simples : raffinement.
- Effectuer des raffinements successifs.
- Le niveau de raffinement le plus élémentaire est celui des instructions.

- Le type des données et des résultats doivent être précisés.
- L'algorithme doit fournir au moins un résultat.
- L'algorithme doit être exécuté en un nombre fini d'opérations.
- L'algorithme doit être spécifié clairement, sans la moindre ambiguïté.



Exercice 3.1

On cherche les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

en supposant que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Ecrire un algorithme permettant de résoudre cette équation.



Exercice 3.2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^n k \sin(2 * k * x)$$





Exercice 3.3

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^k \sin(2 * k * z/n)^k$$





Exercice 3.4

Reprendre les quatre exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

- 1 Introduction
- 2 Pseudo-langage algorithmique
- 3 Méthodologie de construction
- 4 Pseudo-langage algorithmique (suite)
 - Les fonctions
 - Exemple : résolution d'une équation
 - Exemple : résolution d'une équation du second degré

Les fonctions permettent

- d'automatiser certaines tâches répétitives au sein d'un même algorithme,
- d'ajouter à la clarté de l'algorithme,
- l'utilisation de portion de code dans un autre algorithme,
- ...

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

sin, cos, exp, ...

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

sin, cos, exp, ...

- les fonctions de gestion de fichiers
- ...

- 1 Que doit-on calculer/réaliser précisément (but)?
- 2 Quelles sont les données (avec leurs limitations)?

```
Fonction [args1, ..., argsn] ← NomFonction( arge1, ..., argem )  
instructions  
Fin Fonction
```

```
Fonction args ← NomFonction( arge1, ..., argem )  
instructions  
Fin Fonction
```

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
- Données :
- Résultats :

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
- Résultats :

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
 $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
 $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :
 $x \in \mathbb{R}$.

Algorithme 1 Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

Données : a : nombre réel différent de 0
 b : nombre réel.

Résultat : x : un réel.

- 1: **Fonction** $x \leftarrow \text{REPD}(a, b)$
 - 2: $x \leftarrow -b/a$
 - 3: **Fin Fonction**
-

équation du second degré

On cherche les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

Pour celà, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors les deux solutions sont complexes,
- si $\Delta = 0$ alors la solution est $x = -\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$ alors les deux solutions sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice

- 1 Ecrire la fonction discriminant permettant de calculer le discriminant de l'équation (2).
- 2 Ecrire la fonction RESD permettant de résoudre l'équation (2) en utilisant la fonction discriminant.
- 3 Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions.

Chapitre III

Résolution de systèmes non-linéaires



Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babyloniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : *Scipio del Ferro* (1465-1526, mathématicien italien) et *Niccolo Fontana* (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : *Ludovico Ferrari* (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : *Paolo Ruffini* (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, *Niels Henrick Abel* (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.



(a) *Niccolo Fontana*
1499-1557,
mathématicien italien



(b) *Paolo Ruffini*
1765-1822,
mathématicien italien



(c) *Niels Henrick Abel*
1802-1829,
mathématicien norvégien

- 5 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
- 6 Résolution de systèmes non linéaires

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\alpha \in \mathcal{D} \text{ tels que } f(\alpha) = 0.$$

Soit $I =]a, b[$, $\bar{I} \subset \mathcal{D}$ on suppose $\exists ! \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

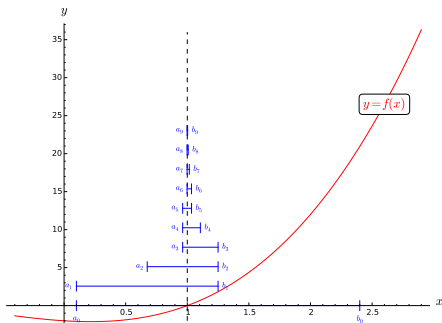


Figure : Méthode de dichotomie: $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = (a_k + b_k)/2$, et

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$



Proposition 5.1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leq \epsilon.$$



Exercice 5.1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\xi \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

Q. 1

- 1 Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .
- 2 En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

Q. 2

- 1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
- 2 Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.



- Que cherche-t'on?
- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat :

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat :

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

Données :

- a, b : deux réels $a < b$,
- f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition ,
- ϵ : un réel strictement positif.

Algorithme 2 \mathcal{R}_0

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Calcul de la suite $(x_k)_{k=0}^{k_{\min}}$
- 3: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 2 \mathcal{R}_1

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Initialisation de x_0
- 3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ **faire**
- 4: Calcul de la suite (x_{k+1})
- 5: **Fin Pour**
- 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 2 \mathcal{R}_1

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Initialisation de x_0
- 3: Pour $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ faire
- 4: Calcul de la suite (x_{k+1})
- 5: Fin Pour
- 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 2 \mathcal{R}_2

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: $a_0 \leftarrow a, b_0 \leftarrow b$
- 3: $x_0 \leftarrow \frac{a_0+b_0}{2}$
- 4: Pour $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ faire
- 5: Si $f(x_k) == 0$ alors
- 6: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
- 7: Sinon Si $f(x_k)f(b_k) < 0$
- alors
- 8: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow b_k$
- 9: Sinon
- 10: $a_{k+1} \leftarrow a_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
- 11: Fin Si
- 12: $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$
- 13: Fin Pour
- 14: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 2 Méthode de dichotomie : version 1

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 5.1,
 eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{Dichotomie1}(f, a, b, \text{eps})$ 
2:    $\text{kmin} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:    $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\text{kmin}+1} \quad \triangleright \mathbf{A}(k+1)$  contiendra  $a_k, \dots$ 
4:    $\mathbf{A}(1) \leftarrow a, \mathbf{B}(1) \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (a + b)/2$ 
5:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $\text{kmin}$  faire
6:     Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:        $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:     Sinon Si  $f(\mathbf{B}(k))f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:        $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{B}(k)$ 
10:    Sinon
11:       $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
12:    Fin Si
13:     $\mathbf{X}(k+1) \leftarrow (\mathbf{A}(k+1) + \mathbf{B}(k+1))/2$ 
14:  Fin Pour
15:   $x \leftarrow \mathbf{X}(\text{kmin} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```

Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a, B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in \llbracket 0, k_{\min} - 1 \rrbracket$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k, B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k, A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A + B}{2}$$

Algorithme 3 Méthode de dichotomie : version 2

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 5.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{Dichotomie2}( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:    $\text{kmin} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps})/\log(2) \rceil$ 
3:    $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\text{kmin}+1} \quad \triangleright \mathbf{X}(k+1)$  contiendra  $x_k, \dots$ 
4:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (A + B)/2$ 
5:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $\text{kmin}$  faire
6:     Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow \mathbf{X}(k), B \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:     Sinon Si  $f(A)f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow \mathbf{X}(k) \quad \triangleright B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow \mathbf{X}(k) \quad \triangleright A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $\mathbf{X}(k+1) \leftarrow (A + B)/2$ 
14:  Fin Pour
15:   $x \leftarrow \mathbf{X}(\text{kmin} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```

Algorithme 4 Méthode de dichotomie : version 3

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 5.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{Dichotomie2}( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:    $\text{kmin} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps})/\log(2) \rceil$ 
3:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
4:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
5:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $\text{kmin}$  faire
6:     Si  $f(x) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:     Sinon Si  $f(A)f(x) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow x$  ▷  $B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow x$  ▷  $A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14:  Fin Pour
15: Fin Fonction
```

Algorithme 5 Méthode de dichotomie : version 4

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \dots$,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{Dichotomie4}(f, a, b, \text{eps})$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
5:     Si  $f(x) == 0$  alors
6:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
7:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
8:        $A \leftarrow x$                                 ▷  $B$  inchangé
9:     Sinon
10:       $B \leftarrow x$                                 ▷  $A$  inchangé
11:    Fin Si
12:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
13:  Fin Tantque
14: Fin Fonction
```

Que pensez vous de cet algorithme?

Algorithme 6 Méthode de dichotomie : version 5

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Résultat : x : un réel tel que $f(x) = 0$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{Dichotomie5}(f, a, b)$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2, xp \leftarrow a$ 
4:   Tantque  $x \sim= xp$  faire
5:     Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
6:        $A \leftarrow x$  ▷  $B$  inchangé
7:     Sinon
8:        $B \leftarrow x$  ▷  $A$  inchangé
9:     Fin Si
10:     $xp \leftarrow x$ 
11:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
12:  Fin Tantque
13: Fin Fonction
```

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de Φ revient à

Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

avec $x^{(0)} \in [a, b]$ donné.

♥ Definition 5.2

On dit qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, obtenue par une méthode numérique, **converge vers α avec un ordre $p \geq 1$** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ tels que } \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C, \forall k \geq k_0. \quad (4)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.



Théorème 6: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (5)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$, la suite définie en (3) converge vers α avec un ordre 1 pour toute donnée initiale $x^{(0)}$ dans $[a, b]$, et l'on a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (6)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (7)$$





Théorème 7: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (8)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

- 1 la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
- 2 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$,
- 3 la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.

4

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (9)$$





Théorème 8: Convergence locale du point fixe



Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α . Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| < \delta$. De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (10)$$



Proposition 8.1:



Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p + 1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (11)$$

On s'intéresse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi : x \mapsto x^2$.

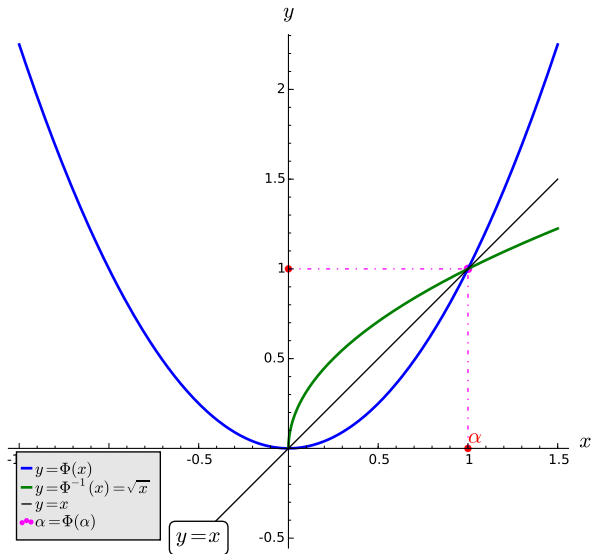
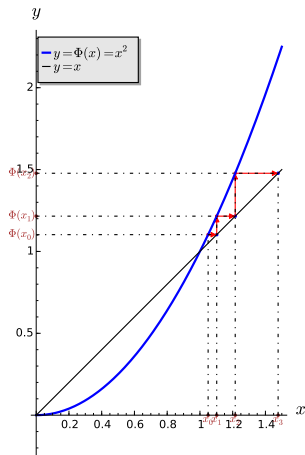
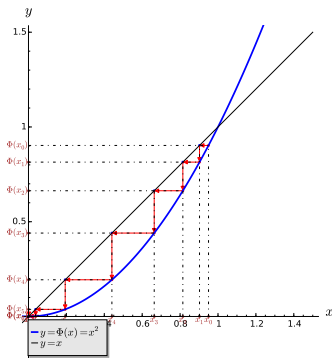


Figure : fonction x^2 et son fonction inverse \sqrt{x} sur $[0, +\infty[$

$\Phi'(\alpha) = 2$: point fixe répulsif



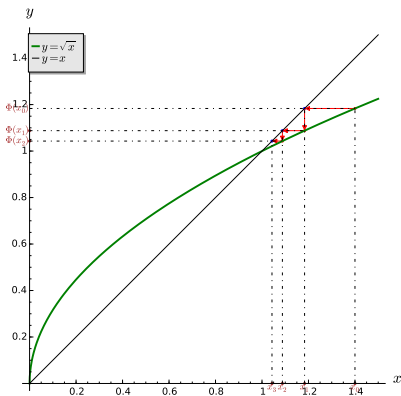
(a) $x_0 = 1.05$



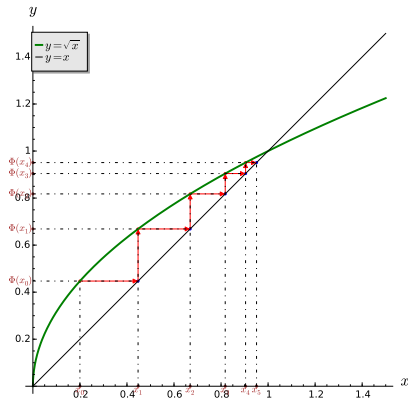
(b) $x_0 = 0.950$

Figure : $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1$, : **point fixe attractif**



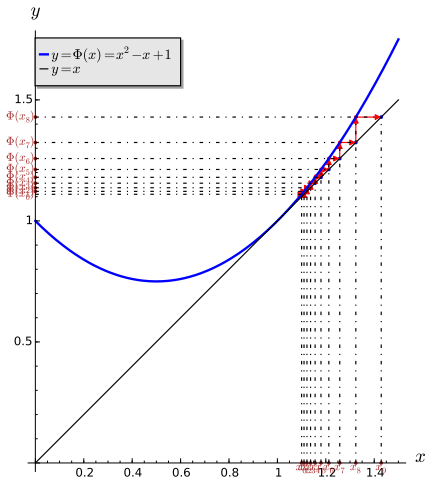
(a) $x_0 = 1.40$



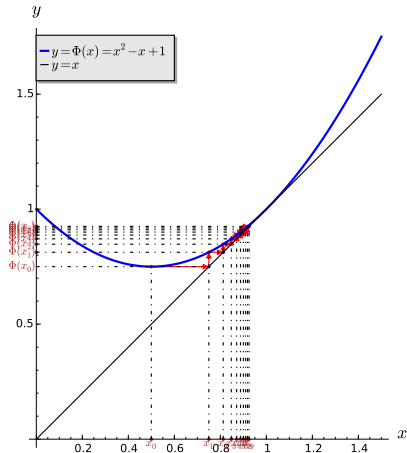
(b) $x_0 = 0.200$

Figure : $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $f : x \mapsto x^2 - x + 1$: point fixe $\alpha = 1$, $f'(\alpha) = 1$.

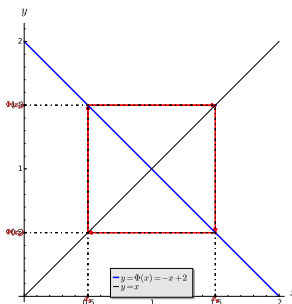


(a) $x_0 = 1.1$, α point répulsif

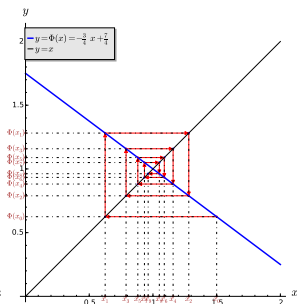


(b) $x_0 = 0.50$, α point attractif

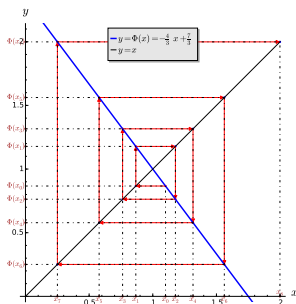
Figure : $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$



(a) $x_0 = 1.50$



(b) $x_0 = 1.50$



(c) $x_0 = 1.10$

Figure : $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

Algorithme 7 Méthode de point fixe
: version **Tantque** *formel*

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Tantque** non convergence **faire**
 - 3: $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
 - 4: $k \leftarrow k + 1$
 - 5: **Fin Tantque**
 - 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.
-

Algorithme 8 Méthode de point fixe
: version **Répéter** *formel*

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Répéter**
 - 3: $k \leftarrow k + 1$
 - 4: $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
 - 5: **jusqu'à** convergence
 - 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.
-

Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger \implies k_{\max} nb maximum d'itérations
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leq \text{tol}$
(critère de Poisson? Que mettre à Laplace?)

Algorithme générique du point fixe

Algorithme 9 Méthode de point fixe : version **Tantque** formel avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2:  $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\Phi(x_0) - x_0|}{|x_0| + 1}$ 
3: Tantque  $\text{err} > \epsilon$  et  $k \leq k_{\max}$  faire
4:    $k \leftarrow k + 1$ 
5:    $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$ 
6:    $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
7: Fin Tantque
8: Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
9:    $\alpha_{\text{to1}} \leftarrow x_k$   $\triangleright |\Phi(\alpha_{\text{to1}}) - \alpha_{\text{to1}}| \leq \text{tol}$ 
10: Fin Si
```

Algorithme 10 Méthode de point fixe : version **Répéter** formel avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2: Répéter
3:    $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
4:    $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$ 
5:    $k \leftarrow k + 1$ 
6: jusqu'à  $\text{err} \leq \text{tol}$  ou  $k > k_{\max}$ 
7: Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
8:    $\alpha_{\text{to1}} \leftarrow x_k$   $\triangleright |\Phi(\alpha_{\text{to1}}) - \alpha_{\text{to1}}| \leq \text{tol}$ 
9: Fin Si
```

Algorithme générique du point fixe

Algorithme 11 Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$ 
4:    $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
5:   Tantque  $\text{err} > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x \leftarrow \text{fx}$ 
8:      $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$ 
9:      $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
12:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 12 Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0$ 
4:   Répéter
5:      $x_p \leftarrow x$ 
6:      $x \leftarrow \Phi(x_p)$ 
7:      $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|x - x_p|}{|x_p| + 1}$ 
8:      $k \leftarrow k + 1$ 
9:   jusqu'à  $\text{err} \leq \text{tol}$  ou  $k > \text{kmax}$ 
10:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
11:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
12:  Fin Si
13: Fin Fonction
```

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) := x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) := x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite x_{k+1} tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - \alpha|$.

formule de Taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et \tilde{h} solution de

$$f(x_k) + \tilde{h}q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{12}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

x_{k+1} : intersection droite de pente q_k passant par $((x_k), f(x_k))$ avec (Ox)

- **Méthode de la corde** :

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Méthode de la sécante** :

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

où x_{-1} et x_0 sont données,

- **Méthode de Newton** : en supposant f' connu, on prend

$$q_k = f'(x_k).$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.



Proposition 8.2: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $k \geq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k). \quad (13)$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (14)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (15)$$

alors la suite (x_k) converge vers l'unique racine $\alpha \in [a, b]$ de f .



Exercice 8.1:



Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \forall k \in \mathbf{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$.

Q. 1

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (16)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (17)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3

En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

Proposition 8.3: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (13) converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.



Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0),$
 - 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ faire
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x \leftarrow \text{fx}$
 - 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ alors \triangleright Convergence
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Méthode de la corde :

$$\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$

Méthode de point fixe : version Tantque avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}| \leq tol$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}|}{|\alpha_{tol}|+1} \leq tol$)

```
1: Fonction  $\alpha_{tol} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, tol, kmax)$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0, fx \leftarrow \Phi(x_0)$ ,
4:    $err \leftarrow |fx - x|$  ▷ ou  $\frac{|fx-x|}{|x|+1}$ 
5:   Tantque  $err > tol$  et  $k \leq kmax$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x \leftarrow fx$ 
8:      $fx \leftarrow \Phi(x)$ 
9:      $err \leftarrow |fx - x|$  ▷ ou  $\frac{|fx-x|}{|x|+1}$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
12:     $\alpha_{tol} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 13 Méthode de la corde

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 a, b : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{tol})| \leq tol$

```
1: Fonction  $\alpha_{tol} \leftarrow \text{Corde}(f, a, b, x_0, tol, kmax)$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ 
4:    $x \leftarrow x_0$ ,
5:    $err \leftarrow tol + 1$ 
6:   Tantque  $err > tol$  et  $k \leq kmax$  faire
7:      $k \leftarrow k + 1$ 
8:      $xp \leftarrow x$ 
9:      $x \leftarrow xp - q * f(xp)$ 
10:     $err \leftarrow |x - xp|$ 
11:  Fin Tantque
12:  Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
13:     $\alpha_{tol} \leftarrow x$ 
14:  Fin Si
15: Fin Fonction
```

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version Tantque avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$ ,
4:    $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$  ▷ ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
5:   Tantque  $\text{err} > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x \leftarrow \text{fx}$ 
8:      $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$ 
9:      $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$  ▷ ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors ▷ Convergence
12:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 14 Méthode de la corde

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 a, b : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\text{tol}})| \leq \text{tol}$

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{Corde}(f, a, b, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ 
3:    $\Phi \leftarrow x \mapsto x - q * f(x)$ 
4:    $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
5: Fin Fonction
```

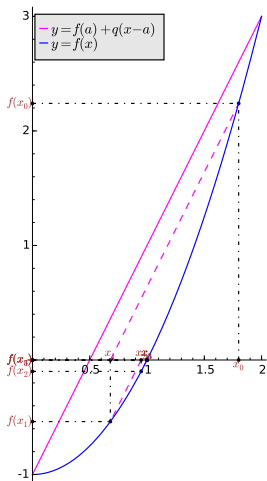
Plus simple, plus court ... ???

$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

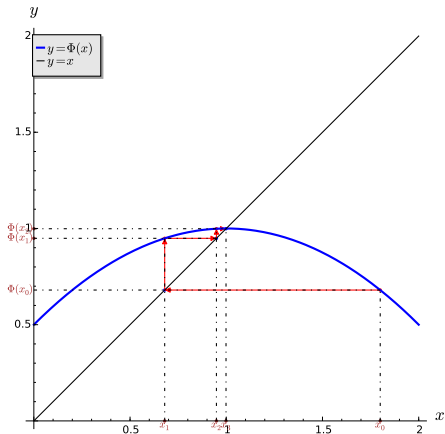
- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

	exemple 1	exemple 2
k	$ x_k - \alpha $	$ x_k - \alpha $
0	8.0000e-01	8.0000e-01
1	3.2000e-01	1.3333e-01
2	5.1200e-02	2.9630e-02
3	1.3107e-03	5.3041e-03
4	8.5899e-07	8.9573e-04
5	3.6893e-13	1.4962e-04
6	0.0000e+00	2.4947e-05
\vdots	\vdots	\vdots
15	0.0000e+00	2.4756e-12

L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement

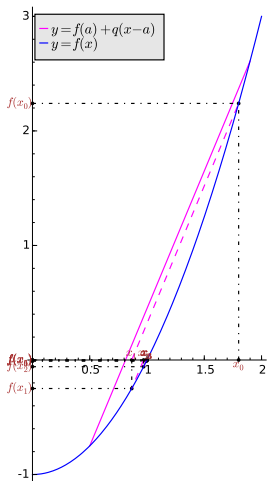


(a) représentation usuelle

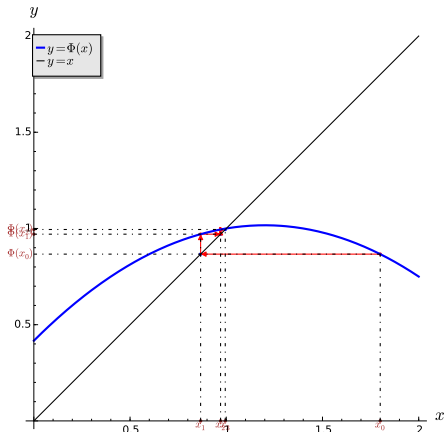


(b) Représentation point fixe

Figure : Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,

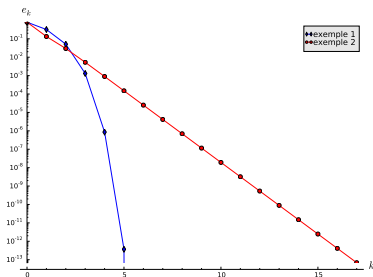


(a) représentation usuelle

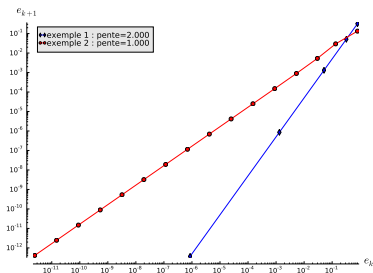


(b) Représentation point fixe

Figure : Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,



(a) Erreurs en fonctions des itérations



(b) Représentation en échelle logarithmique de e_{k+1} en fonction de e_k . Les pentes sont calculées numériquement

Figure : Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.



Proposition 8.4: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

est localement convergente d'ordre 2.



Exercice 8.2

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$a = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|a - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



Q. 1

Comment feriez-vous pour trouver à la main une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.

Q. 2

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de \sqrt{a} où a est un réel positif.

Q. 3

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.



Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0),$
 - 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x| \quad \triangleright \text{ou } \frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x \leftarrow \text{fx}$
 - 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x| \quad \triangleright \text{ou } \frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$ ,
4:    $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
5:   Tantque  $\text{err} > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x \leftarrow \text{fx}$ 
8:      $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$ 
9:      $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$   $\triangleright$  ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
12:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 15 Méthode de Newton

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{Newton}(f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0$ ,
4:    $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$ 
5:   Tantque  $\text{err} > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x_p \leftarrow x$ 
8:      $x \leftarrow x_p - f(x_p)/\text{df}(x_p)$   $\triangleright \text{df}(x_p) \neq 0$ 
9:      $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors  $\triangleright$  Convergence
12:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$ ,
4:    $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$  ▷ ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
5:   Tantque  $\text{err} > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $x \leftarrow \text{fx}$ 
8:      $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$ 
9:      $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$  ▷ ou  $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$ 
10:  Fin Tantque
11:  Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors ▷ Convergence
12:     $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$ 
13:  Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 16 Méthode de Newton

Données :

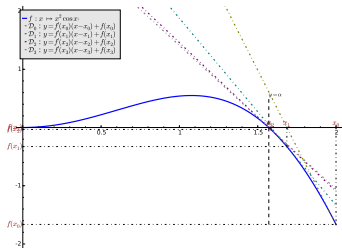
- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

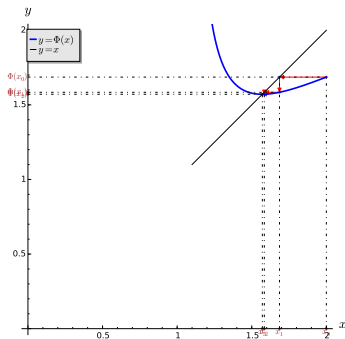
- α_{tol} : un réel tel que

```
1: Fonction  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{Newton}(f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
2:    $\Phi \leftarrow x \mapsto x - f(x)/\text{df}(x)$ 
3:    $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$ 
4: Fin Fonction
```

Plus simple, plus court ... ???



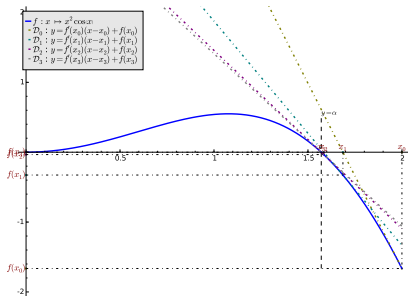
(a) représentation usuelle



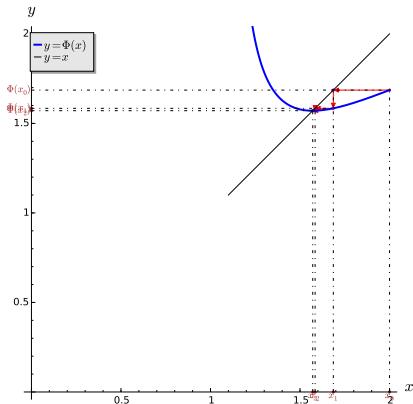
(b) Représentation point fixe,

$$\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x \cos(x)} + x$$

Figure : Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,



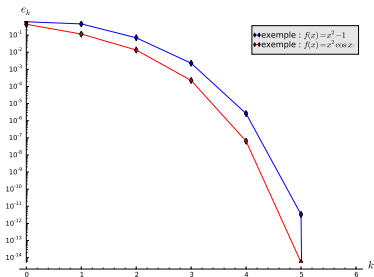
(a) représentation usuelle



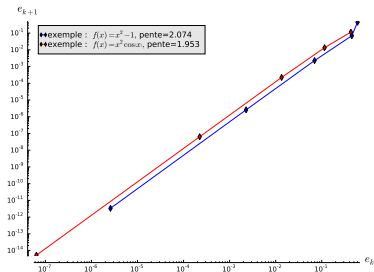
(b) Représentation point fixe,

$$\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x \cos(x)} + x$$

Figure : Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k




(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique 2

Figure : Méthode de Newton, convergence et ordre

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connaît pas la dérivée de la fonction f :

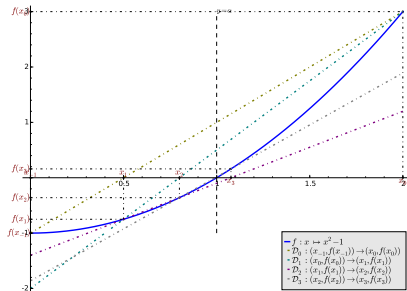
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

 **Proposition 8.5: Convergence méthode de la sécante (Admis)**

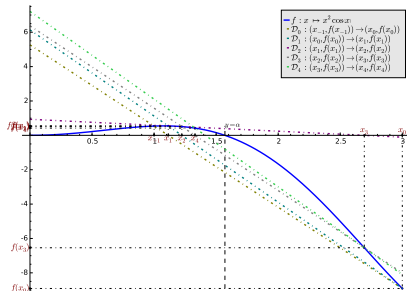
Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

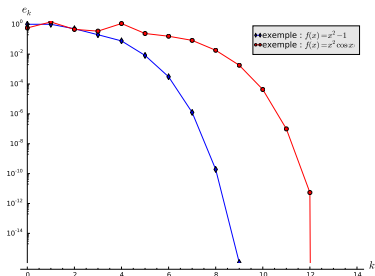


(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

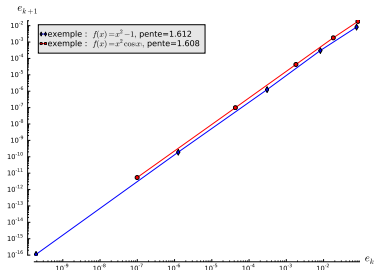


(b) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure : Méthode de la sécante



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



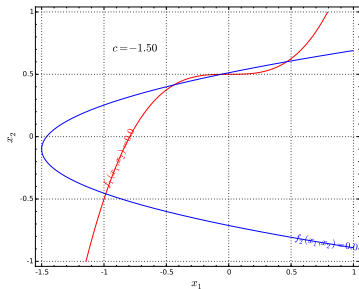
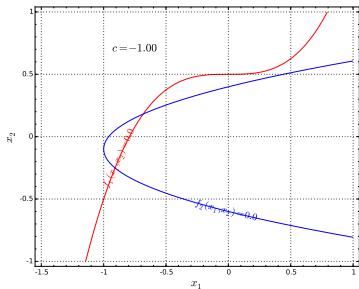
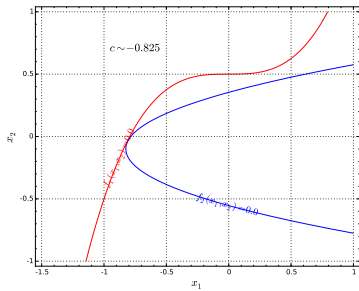
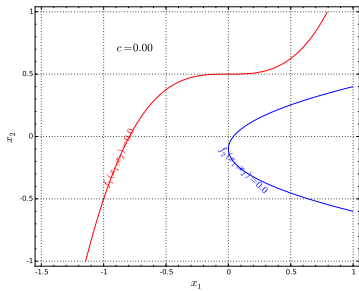
(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Figure : Méthode de la sécante, convergence et ordre

- 5 Recherche des zéros d'une fonction
- 6 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \quad (20)$$



Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\mathbf{f}(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} \mathbf{f}_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \mathbf{f}_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$, : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \iff \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ Point fixe

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$



Théorème 9.1: Point fixe de Banach



Soit \mathcal{B} un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0, 1[, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U. \quad (21)$$

Alors

- 1 Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$).
- 2 La suite des itérés $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
- 3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (22)$$



$\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisamment régulière. On définit la **matrice Jacobienne de \mathbf{f}** , notée $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}. \quad (23)$$

On a $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}).\mathbf{h}. \quad (24)$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\mathbf{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{h}$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\mathbf{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - ((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$. la méthode de Newton s'écrit alors

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right) \quad (25)$$



Théorème 9.2: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$?



Théorème 9.3: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$?

On résout le système linéaire

$$\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]})) \right) \mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connaît pas explicitement la Jacobienne de f , il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de dérivation numérique.

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
 df : la dérivée de f ,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que

- ```
1: Fonction $\alpha_{tol} \leftarrow \text{Newton}(f, df, x_0, tol, kmax)$
2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
3: $x \leftarrow x_0,$
4: $err \leftarrow tol + 1$
5: Tantque $err > tol$ et $k \leq kmax$ faire
6: $k \leftarrow k + 1$
7: $xp \leftarrow x$
8: $x \leftarrow xp - f(xp)/df(xp) \quad \triangleright x \leftarrow \Phi(xp)$
9: $err \leftarrow |x - xp|$
10: Fin Tantque
11: Si $err \leq tol$ alors
12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
13: Fin Si
14: Fin Fonction
```

### Méthode de Newton *vectorielle* :

$$\Phi(x) = x - ((J_f(x))^{-1} f(x))$$

---

## Méthode de Newton scalaire

---

### Données :

$f$  :  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $df$  : la dérivée de  $f$ ,  
 $x_0$  : donnée initiale,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  
 $tol$  : la tolérance,  $tol \in \mathbb{R}^+$ ,  
 $kmax$  : nombre maximum d'itérations,  $kmax \in \mathbb{N}^*$

### Résultat :

$\alpha_{tol}$  : un réel tel que

```
1: Fonction $\alpha_{tol} \leftarrow \text{Newton}(f, df, x_0, tol, kmax)$
2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
3: $x \leftarrow x_0$,
4: $err \leftarrow tol + 1$
5: Tantque $err > tol$ et $k \leq kmax$ faire
6: $k \leftarrow k + 1$
7: $xp \leftarrow x$
8: $x \leftarrow xp - f(xp)/df(xp) \quad \triangleright x \leftarrow \Phi(xp)$
9: $err \leftarrow |x - xp|$
10: Fin Tantque
11: Si $err \leq tol$ alors
12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
13: Fin Si
14: Fin Fonction
```

---

---

## Algorithme 17 Méthode de Newton vectorielle

---

### Données :

$f$  :  $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ,  
 $Jf$  : la matrice Jacobienne de  $f$ ,  
 $x_0$  : donnée initiale,  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  
 $tol$  : la tolérance,  $tol \in \mathbb{R}^+$ ,  
 $kmax$  : nombre maximum d'itérations,  $kmax \in \mathbb{N}^*$

### Résultat :

$\alpha_{tol}$  : un élément de  $\mathbb{R}^N$  proche de  $\alpha$ .

```
1: Fonction $\alpha_{tol} \leftarrow \text{Newton}(f, Jf, x_0, tol, kmax)$
2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
3: $x \leftarrow x_0$,
4: $err \leftarrow tol + 1$
5: Tantque $err > tol$ et $k \leq kmax$ faire
6: $k \leftarrow k + 1$
7: $xp \leftarrow x$
8: $h \leftarrow \text{Solve}(Jf(xp), -f(xp))$
9: $x \leftarrow xp + h$
10: $err \leftarrow \text{Norm}(x - xp)$
11: Fin Tantque
12: Si $err \leq tol$ alors \triangleright Convergence
13: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
14: Fin Si
15: Fin Fonction
```

---

Soit  $c = 3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c \end{cases}$$

Conclusion?

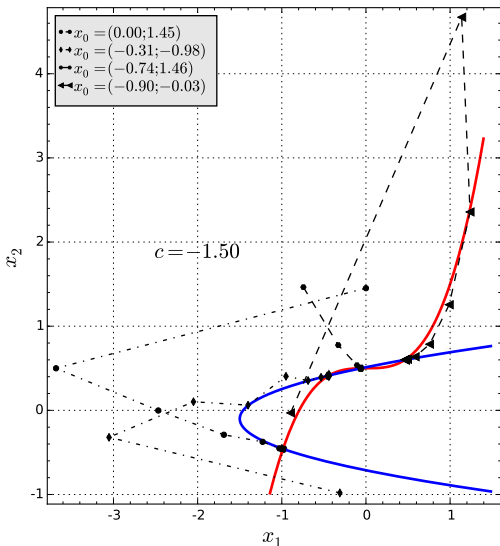


Figure : Représentation de 4 suites de Newton

Soit  $c = 3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c \end{cases}$$

Conclusion?

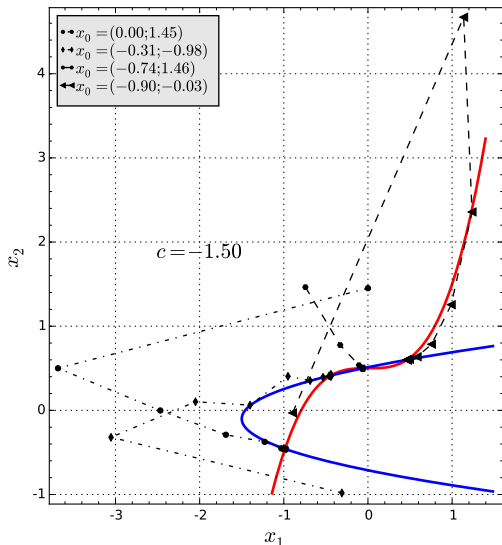
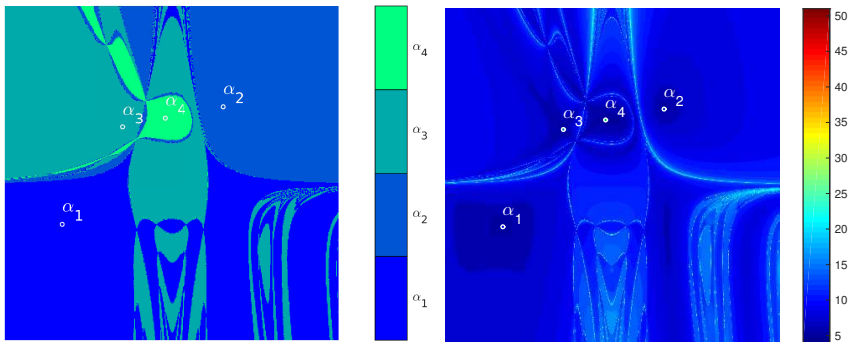


Figure : Représentation de 4 suites de Newton

Très difficile, si l'on n'est pas suffisamment proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.



(a) Bassin d'attraction des racines

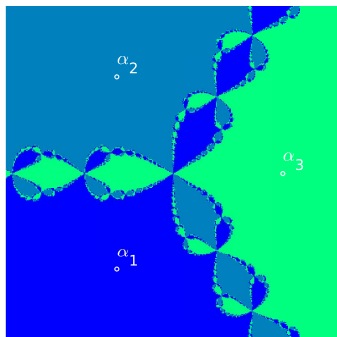
(b) Nombre d'itérations de convergence

Figure : Méthode de Newton

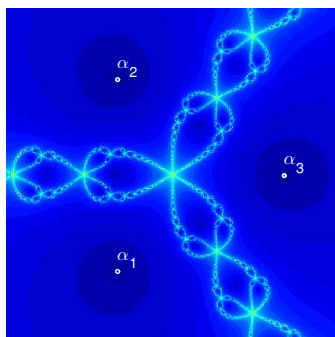
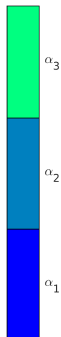
# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton

on peut poser  $z = x + iy$ , et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) = 3x^2y - x^3 = 0. \end{cases}$$

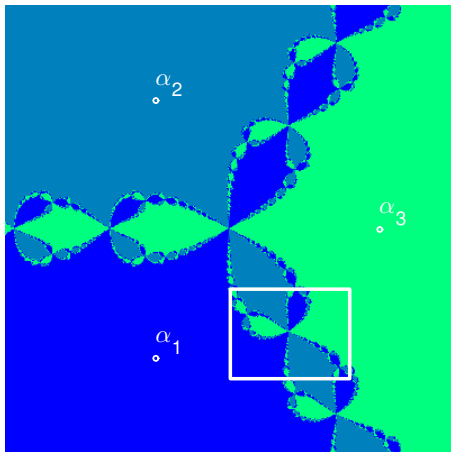


(a) Bassin d'attraction des racines



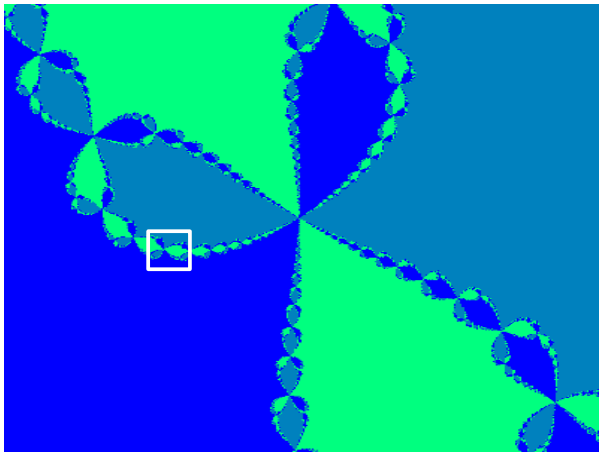
(b) Nombre d'itérations de convergence

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton



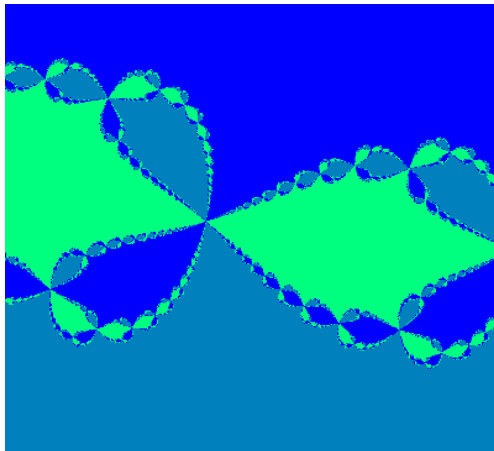
Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton



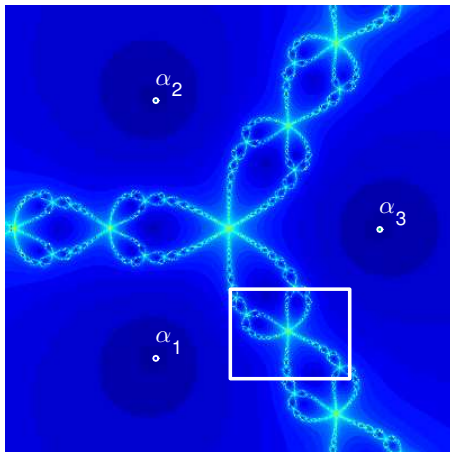
Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton



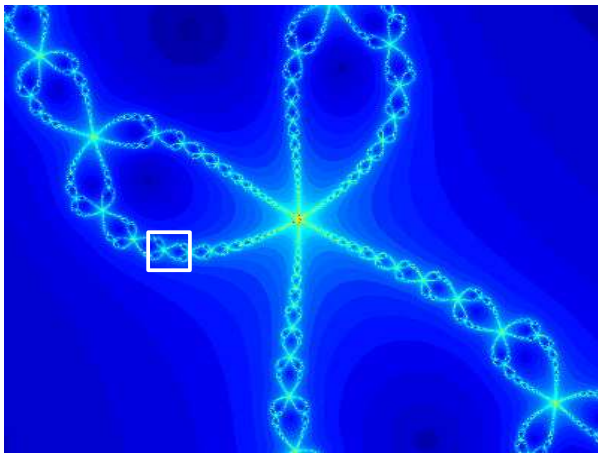
Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton



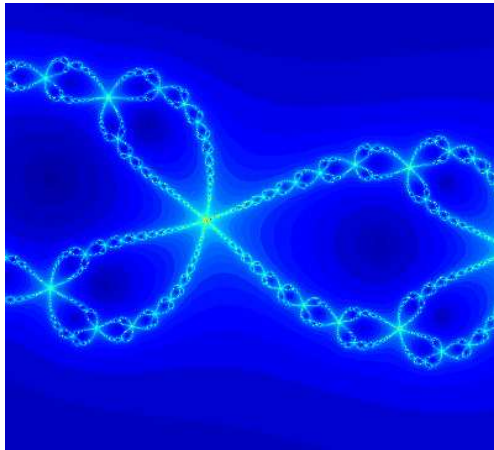
Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton



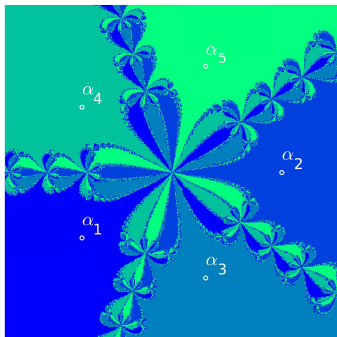
Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$ , fractale de Newton

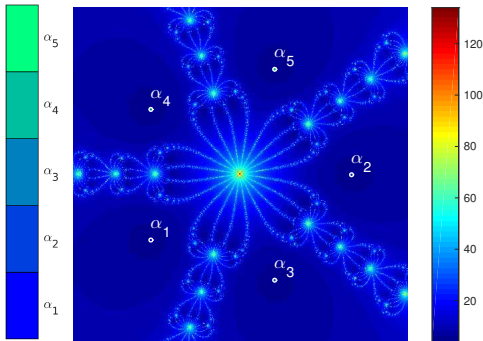


Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$ , fractale de Newton



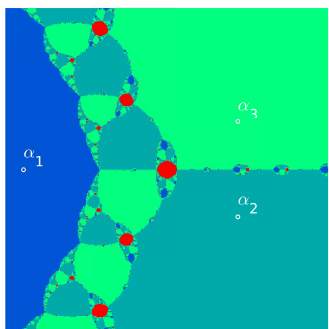
(a) Bassin d'attraction des racines



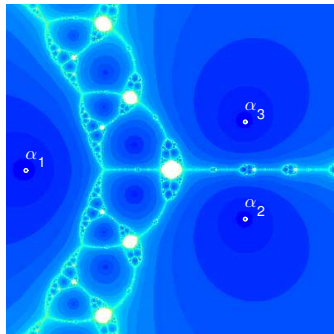
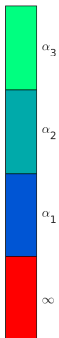
(b) Nombre d'itérations de convergence

$$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$$

# Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$ , fractale de Newton



(a) Bassin d'attraction des racines.  
En rouge zône de divergence



(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zône de divergence

$$[-2, 2] \times [-2, 2]$$

# Chapitre IV

## Résolution de systèmes linéaires

# Chapitre V

## Polynômes d'interpolation de Lagrange

# Chapitre VI

## Dérivation numérique

# Chapitre VII

## Intégration numérique