

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (1)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

Correction Exercice

Q. 1 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (3.15) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x - b) \leq f(x) \leq \lambda(x - a) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (3.15) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x - a) \leq f(x) \leq \lambda(x - b) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b.\end{aligned}$$

Q. 2 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (3.16) devient

$$\begin{aligned}0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (3.16) devient

$$\begin{aligned}2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.\end{aligned}$$

Q. 3 Sous les hypothèses (3.15) et (3.16) on a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et $\forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, la fonction Φ l'est aussi. La suite (x_k) est définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Ainsi les hypothèses du théorème 3.4 sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite (x_k) vers ce point fixe.

◇

pdf/RSNL_Corde01.pdf Méthode de la corde

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (3)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (4)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

pdf/buildpdf.inc



Proposition: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (3.12) converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Proof. • **Order 1** : On note $\lambda = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. On a par définition $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ (ce qui suppose que $f(x_k)$ soit bien définie, i.e. $x_k \in [a, b]$). Comme $\lambda \neq 0$ et f continue, l'hypothèse (x_k) converge vers α entraîne que $f(\alpha) = 0$. Pour définir l'ordre de convergence, on suppose de plus que $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$. On peut alors appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe ξ_k compris entre x_k et α tel que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\xi_k) = (x_k - \alpha)f'(\xi_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite x_k

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x_k - \alpha)f'(\xi_k).$$

En soustrayant α à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \lambda(x_k - \alpha)f'(\xi_k) = (x_k - \alpha)(1 - \lambda f'(\xi_k)).$$

Comme $x_k \neq \alpha$, on a alors

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = 1 - \lambda f'(\xi_k).$$

Or x_k converge vers α et ξ_k compris entre x_k et α , ce qui entraîne que ξ_k converge vers α . La fonction f' étant continue, on en déduit que $f'(\xi_k)$ converge vers $f'(\alpha)$. Ceci donne donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = 1 - \lambda f'(\alpha).$$

La convergence est donc (au moins) d'ordre 1.

- **Order 2 :** La suite étant convergente, il existe $k_0 \in N$ tel que $\forall k \geq k_0$, $x_k \in V$. Soit $k \geq k_0$, comme $f \in \mathcal{C}^2(V)$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe $\eta_k \in V$ compris entre x_k et α que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f^{(2)}(\eta_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite x_k

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \left((x_k - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!} f^{(2)}(\eta_k) \right).$$

En soustrayant α à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) \underbrace{(1 - \lambda f'(\alpha))}_{=0 \text{ par hyp.}} + \lambda \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!} f^{(2)}(\eta_k).$$

Comme $\eta_k \in \mathcal{V}$ converge vers α (car compris entre x_k et α) et $f^{(2)}$ continue sur \mathcal{V} , on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \lambda \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2}.$$

La convergence est donc (au moins) d'ordre 2.

□

