



Théorème: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (1)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
- 4.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2)$$

Proof. Comme Φ est continue sur $[a, b]$ et vérifie $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$, le théorème 3.3 (du point fixe) assure l'existence d'un point fixe. Pour l'unicité, on note $\alpha_1 \in [a, b]$ et $\alpha_2 \in [a, b]$, deux points fixes de Φ . On a donc $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $\xi \in]\min(\alpha_1, \alpha_2), \max(\alpha_1, \alpha_2)[\subset]a, b[$ tel que

$$\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Phi'(\xi).$$

Comme $|\Phi'(\xi)| < 1$, on obtient $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, i.e. $\alpha_1 = \alpha_2$.

Pour le second point, on a immédiatement $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in [a, b]$ car $x_0 \in [a, b]$ et $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$. Le troisième point découle du théorème des accroissements. En effet, pour tout $k > 0$, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_{k-1}), \max(\alpha, x_{k-1}) \subset]a, b[$ tel que

$$\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha) = (x_{k-1} - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient alors

$$|x_k - \alpha| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha|$$

et donc par récurrence

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|.$$

Comme $L < 1$, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

□

