

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2015/11/26

Chapitre VI

Intégration numérique

- 1 Integration numérique
 - Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées



M. Crouzeix and A.L. Mignot.

Analyse numérique des équations différentielles.

Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.



J.P. Demailly.

Analyse numérique et équations différentielles.

Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2012.

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

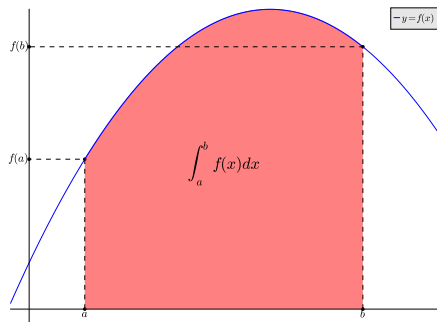


Figure : Représentation de $\int_a^b f(x) dx$ (aire de la surface colorée)

♥ Definition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la formule de quadrature donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \quad (2)$$

♥ Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p .

- 1 Integration numérique
 - Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

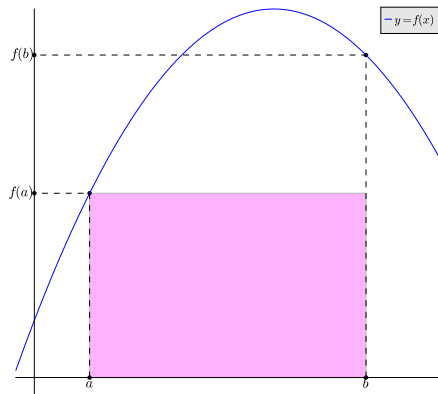


Figure : Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b - a)f(a)$
(aire de la surface colorée)

Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

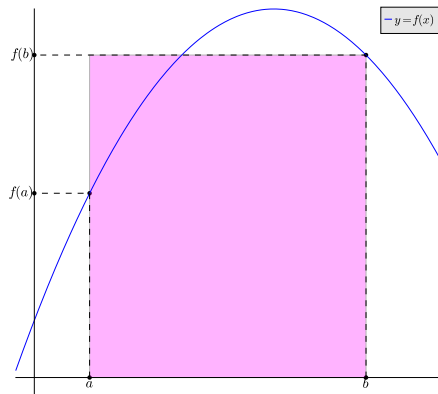


Figure : Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(b)$
(aire de la surface colorée)

Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a+b)/2)$$

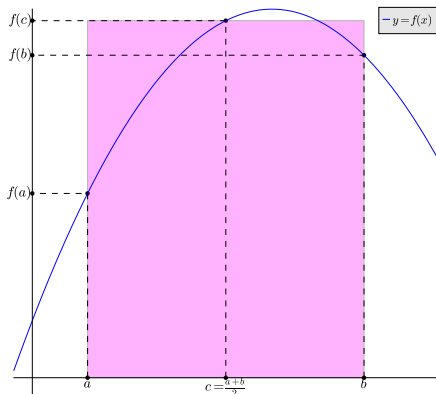


Figure : Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b-a)f((a+b)/2)$



Exercice 1.1

Montrer que les formules des rectangles sont d'ordre 0 et que la formule du point milieu est d'ordre 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?



Exercice 1.2

Montrer que les formules des rectangles sont d'ordre 0 et que la formule du point milieu est d'ordre 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction f par des polynômes d'interpolation de degré ≥ 1 .

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



Proposition:



La formule de quadrature élémentaire (1) à $n + 1$ points est d'ordre k si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3)$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



Proposition:



Soient $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $n + 1$ points d'ordre n au moins.

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



Proposition:



Soit $Q_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (4)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



Proposition:



Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux). Si, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (5)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$ alors la formule de quadrature est d'ordre n au moins et l'on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (6)$$

Dans la proposition précédente, le choix des points reste libre.
Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle $[a, b]$:

Méthodes de Newton-Cotes .

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme

$$\int_a^b w(x)f(x)dx :$$

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

1 Integration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées



Proposition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/n$. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

n	ordre	w_i (poids)										nom
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$								Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$							Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$						Villardeau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$				Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$?

Table : Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients w_i ? :

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$: on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 &= 1, \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = a + h, \\ a^2 w_0 + (a+h)^2 w_1 + (a+2h)^2 w_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2) \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 2 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$ et les w_i ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$: on peut les calculer sur l'intervalle $[0, 1]$ en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2} w_1 + 1 \times w_2 & = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 3** : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t)dx, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{nt - j}{i - j}$$

$$L_0(t) = \frac{2t-1}{-1} \frac{2t-2}{-2} = (2t-1)(t-1)$$

$$L_1(t) = \frac{2t}{1} \frac{2t-2}{-1} = -4(t-1)t$$

$$L_2(t) = \frac{2t}{2} \frac{2t-1}{1} = (2t-1)t$$

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
    L=1
    for j in range(n+1):
        if i!=j:
            L=L*(n*t-j)/(i-j)
    return L

def NewtonCotes(n):
    W=[];
    for i in range(n+1):
        W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
    return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: 
```


Problème lorsque n devient grand! : illustration sur un exemple simple.
Soit $f(x) = 3x + 2$, $a = 0$ et $b = 1$.

- Les formules de Newton-Cotes à $n + 1$ points, $n \geq 1$, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or x_i et w_i sont approchés à $\approx 1e - 16$ près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** : $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** : $\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

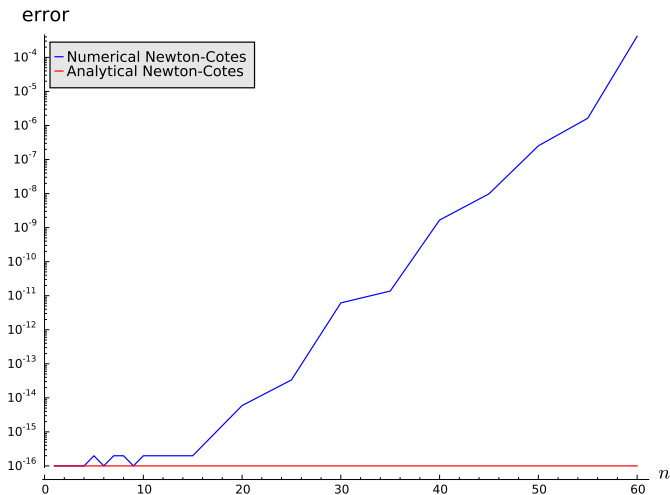


Figure : Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

Remarque 1.1

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grande erreurs. Au delà de $n = 7$, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert!¹

¹Traduction : utiliser la relation de Chasles

1 Integration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

♥ Definition 1.2

Soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ une subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx. \quad (8)$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g, a, b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points d'ordre p donnée par

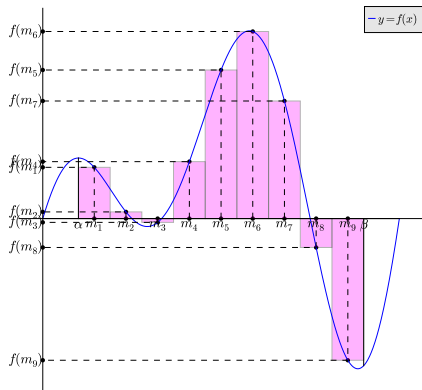
$$\mathcal{Q}_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

La **méthode de quadrature composée** associée à \mathcal{Q}_n , notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (9)$$

$$\mathcal{Q}_n \text{ ordre } p \Rightarrow \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}} \text{ ordre } p$$

Formule composite des points milieux



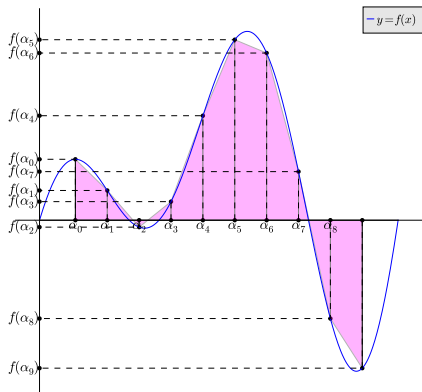
$$\mathcal{Q}_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)g\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^k f(m_j)$$

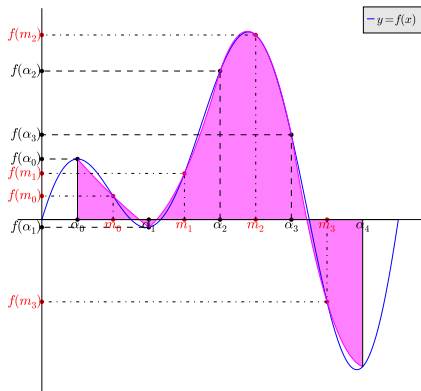
Formule composite des trapèzes



$$Q_1(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$

Formule composite de Simpson



$$\mathcal{Q}_2(g, a, b)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\frac{b-a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b))$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j))$$

1 Integration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta). \quad (10)$$

On a alors

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \sum_{j=1}^k \left(\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)$$

et on a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

Si x_i **discrétisation régulière** de $[a, b]$, on peut démontrer (voir [1])

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)} (b-a)^{n+1}.$$

En notant $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} h_j$ et $K_n = C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)}$

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| &\leq \sum_{j=1}^k |\mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)| \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\
 &\leq K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^k h_j \\
 &\leq K_n (\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq K_n(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :



Théorème 2: [1], page 43 (admis)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire \mathcal{Q}_n d'ordre $p \geq n$. On a alors

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq C_p(\beta - \alpha) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \quad (11)$$

avec $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$.

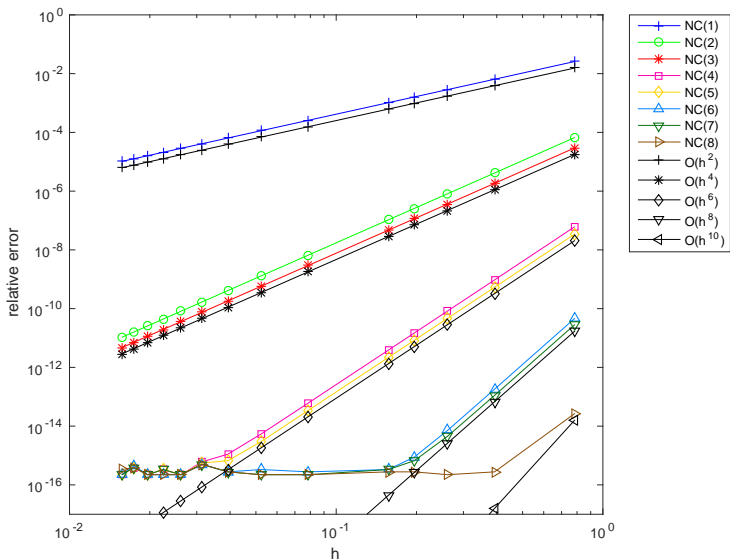


Figure : Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx, \text{ NC}(n) \text{ correspondant à } \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{\pi}{2k}.$$

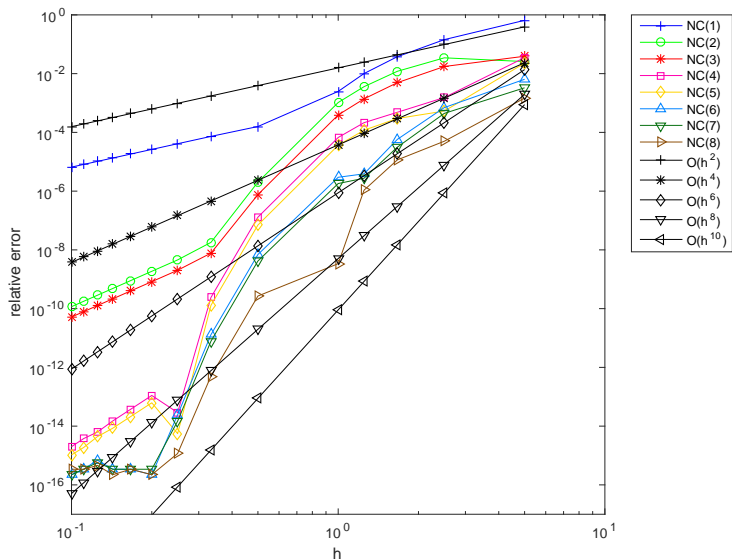


Figure : Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ NC}(n) \text{ correspondant à } Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{10}{k}.$$