



Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \quad (1)$$

Proof. Bien définie et linéaire : facile mais à écrire

On montre tout d'abord que $\|\mathcal{L}_n\| \leq \Lambda_n$. En effet, on a pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f(x_i) L_i(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \\ &\leq \Lambda_n \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty.$$

et donc

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n.$$

Pour obtenir l'égalité (??), il suffit donc, en reprenant les calculs précédents, de regarder si l'on peut trouver $\bar{x} \in [a, b]$ et $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

On détermine \bar{x} pour que la dernière majoration, correspondant à $\sum_{i=0}^n |L_i(x)| \leq \Lambda_n$, devienne une égalité. L'application $x \mapsto \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$ étant continue sur le fermé borné $[a, b]$, il existe alors $\bar{x} \in [a, b]$ tel que

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

On va maintenant regarder s'il est possible de construire une fonction $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ telle que

$$\left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| = \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

Si c'est le cas, on aura bien le résultat souhaité.

Sans déroger à la généralité, on peut supposer les points x_i ordonnés : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Pour avoir la première égalité, il faut que tous les $\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})$ soient de même signe. On choisit le signe positif, et on impose par exemple les valeurs de $\bar{f}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} \bar{f}(x_i) &= 1, & \text{si } L_i(\bar{x}) \geq 0, \\ \bar{f}(x_i) &= -1, & \text{si } L_i(\bar{x}) < 0. \end{cases}$$

Il existe une multitude de fonctions de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ mais il faut contrôler son maximum pour qu'il vaille 1 et avoir ainsi $|\bar{f}(x_i)| = \|\bar{f}\|_\infty$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On peut alors choisir \bar{f} affine sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puisque l'on connaît les valeurs aux extrémités de chaque intervalle (+1 ou -1). En dehors de ces intervalles, on prend par exemple $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$, $\forall x \in [a, x_0]$, et $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_n)$, $\forall x \in [x_n, b]$. Cette fonction est par construction continue sur $[a, b]$ et vérifie

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| &= \left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| \\ &= \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})| \\ &= \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty. \end{aligned}$$

Or on a

$$\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(x)| \geq |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

ce qui donne

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geq \Lambda_n.$$

