

# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2015/11/08

# Chapitre V

## Interpolation

# Plan

- 1 Interpolation de Lagrange
  - Stabilité

- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite



## Exercice 1.1:



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n + 1$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i$  sont distincts deux à deux. On note

**Q.1**

- ❶ Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i$  de degré  $n$  vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

- ❷ Montrer que les  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ ).

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (2)$$

**Q.2** Montrer que polynôme  $P_n$  est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  vérifiant  $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

## ♥ Definition 1.1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  avec  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  et les  $x_i$  distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , noté  $P_n$ , est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

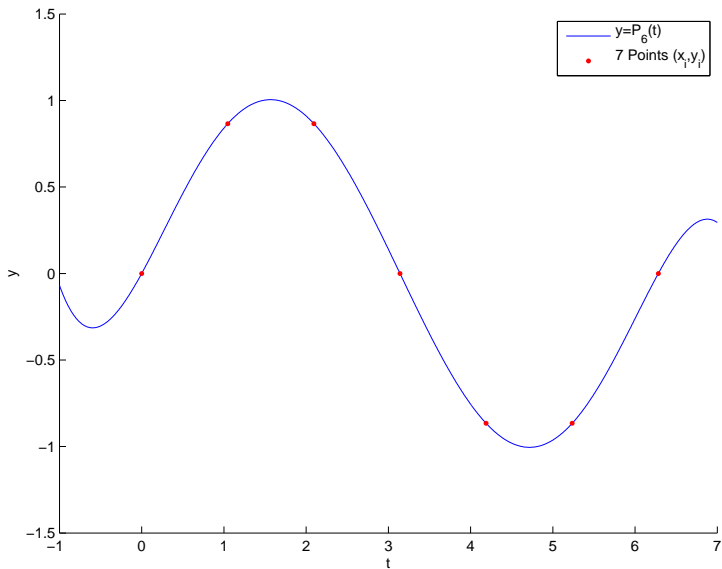
avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

## 📖 Théorème 2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**,  $\mathcal{P}_n$ , associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $n$ , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés



## Exercice 2.1:

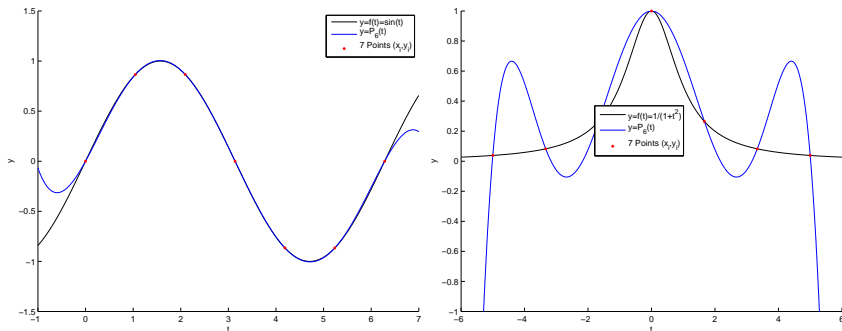


Ecrire la fonction **LAGRANGE** permettant de calculer  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) au point  $t \in \mathbb{R}$ .

Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .



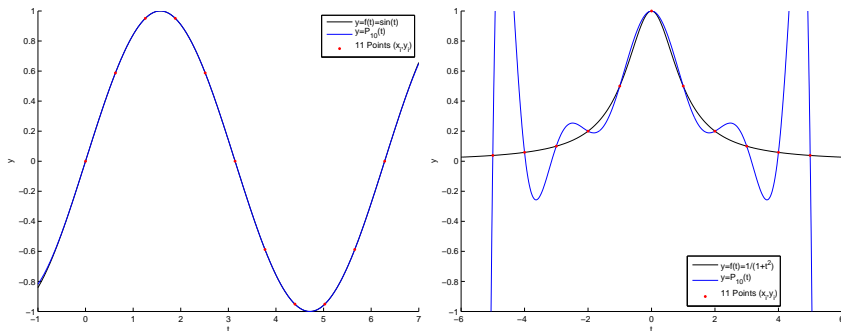
Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 6$  (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : x \longrightarrow \sin(x)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_6 = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_6 = 5$ .



Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

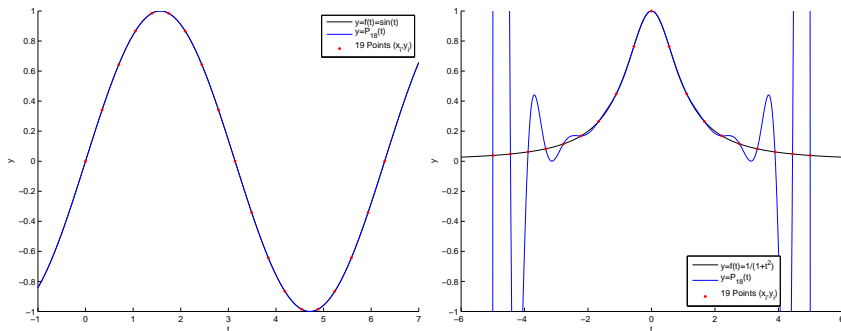


Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 10$  (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : x \longrightarrow \sin(x)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_{10} = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_{10} = 5$ .

Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .



Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 18$  (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : x \longrightarrow \sin(x)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_{18} = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_{18} = 5$ .



## Exercice 2.2:



Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n + 1$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i$  sont distincts deux à deux et  $y_i = f(x_i)$ .

On note par  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\pi_n$  le polynôme de degré  $n + 1$  défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (7)$$

**Q.1** Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle fermé contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (8)$$

**Indication :** Etudier les zéros de la fonction  $F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$ .



### Théorème 3

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  passant par  $(x_i, f(x_i))$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$ ,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (9)$$

Comment "minimiser"  $f(x) - \mathcal{P}_n(x)$ ?



## Théorème 4

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$   $n+1$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  passant par  $(x_i, f(x_i))$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$ ,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (9)$$

Comment "minimiser"  $f(x) - \mathcal{P}_n(x)$ ?

"jouer" sur le choix des points  $x_i$

Trouver  $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$ ,  $\bar{x}_i \in [a, b]$ , distincts deux à deux, tels que  
 $\forall (x_i)_{i=0}^n$ ,  $x_i \in [a, b]$ , distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad (10)$$

On a alors le résultat suivant



### Théorème 5: admis

Les points réalisant (10) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (11)$$

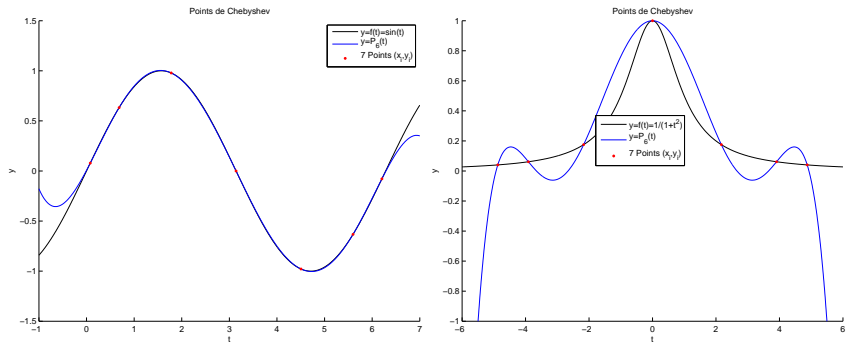


Figure : Erreurs d'interpolation avec  $n = 6$

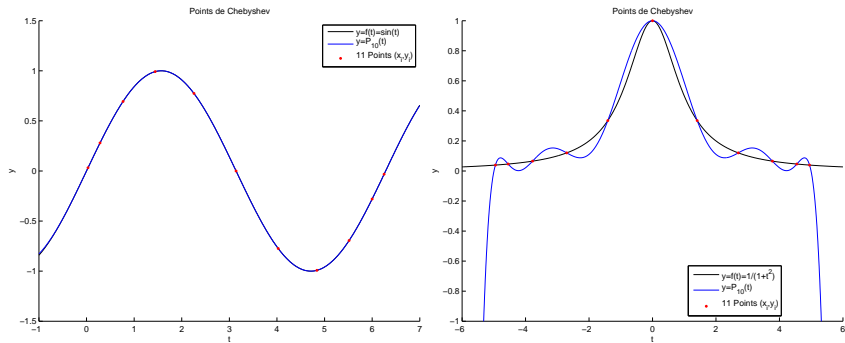


Figure : Erreurs d'interpolation avec  $n = 10$



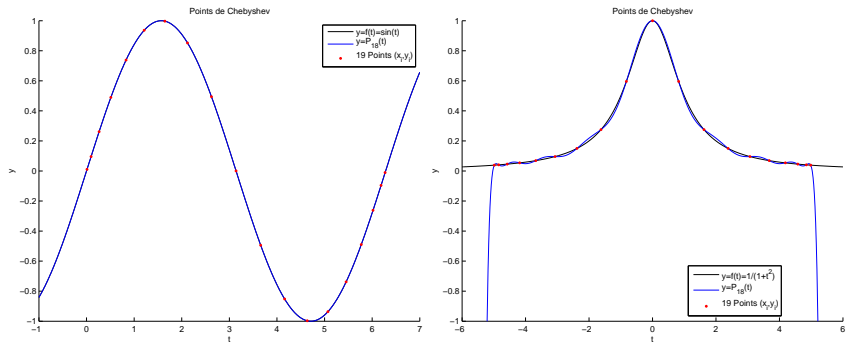


Figure : Erreurs d'interpolation avec  $n = 18$

# Plan

## 1 Interpolation de Lagrange

- Stabilité

## 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\hat{P}_n(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f_i - f(x_i)) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f_i - f(x_i)| |L_i(x)| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^n |L_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue :  $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$

$$\|\hat{P}_n - P_n\|_{\infty} \leq \Lambda_n \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)|.$$



## Proposition:



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  des points distincts de  $[a, b]$ . L'application  $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$  qui à toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  donne le polynôme d'interpolation de Lagrange  $P_n$  associés aux couples de  $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \quad (12)$$



## Théorème 6:



Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (13)$$

- Pour les **points équidistants**  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $h = (b - a)/n$ ,

$$\Lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2} \quad (14)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \ln(n)} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (15)$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leq C \ln(n), \quad \text{avec } C > 0 \quad (16)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (17)$$



## Proposition: admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$  telle que la suite des polynômes d'interpolation associés ne converge pas uniformément.



## Proposition: admis

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur  $[a, b]$  à valeurs réelles, i.e. il existe une constante  $K \geq 0$  telle que  $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ , on ait  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  les points de Tchebychev  $[a, b]$ . On note  $\mathcal{L}_n(f)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de  $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . Alors la suite  $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geq 1}$  des polynômes d'interpolation converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

# Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

# Plan

1 Interpolation de Lagrange

- Stabilité

2 Interpolation de  
Lagrange-Hermite





## Exercice 7.1: Interpolation de Lagrange-Hermite



Soient  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (18)$$

**Q.1** Quel est a priori le degré de  $H_n$ ?

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (19)$$

avec, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A_i$  et  $B_i$  polynômes de degré au plus  $2n + 1$  indépendants des valeurs  $y_i$  et  $z_i$ .

**Q.2**

- ① Déterminer des conditions suffisantes sur  $A_i$  et  $B_i$  pour que  $P_n \equiv H_n$ .
- ② En déduire les expressions de  $A_i$  et  $B_i$  en fonction de  $L_i$  et de  $L'_i(x_i)$  où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

**Q.3** Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus  $2n + 1$  défini par (18).

# Plan

1 Interpolation de Lagrange

- Stabilité

2 Interpolation de  
Lagrange-Hermite

## ♥ Definition 7.1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (20)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (21)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$



## Théorème 8

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**,  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $2n + 1$ , vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (22)$$



### Exercice 8.1: Interpolation de Lagrange-Hermite



Soit  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ . On suppose de plus que,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x_i \in [a, b]$ ,  $y_i = f(x_i)$  et  $z_i = f'(x_i)$ .  
On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

et  $H_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

**Q.1** Montrer que

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \quad (23)$$

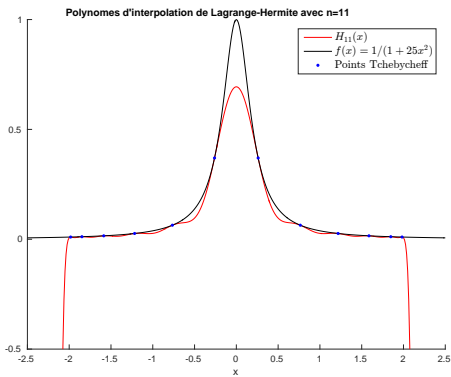
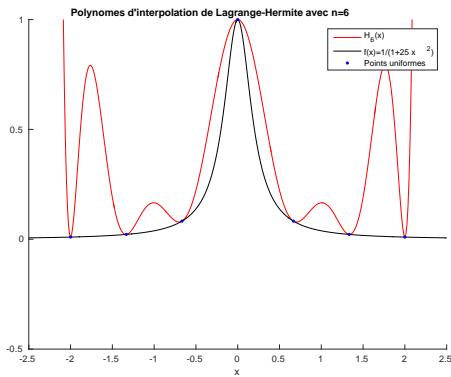
**Indications :** Etudier les zéros de la fonction  $F(y) = f(y) - H_n(y) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$  et appliquer le théorème de Rolle.



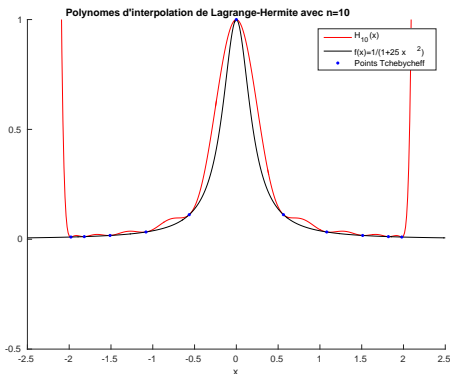
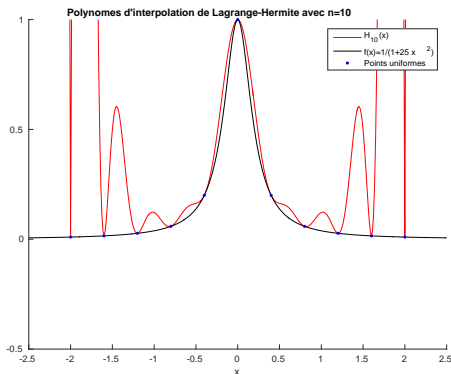
## Théorème 9

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $H_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . On a alors  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$ , tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (24)$$

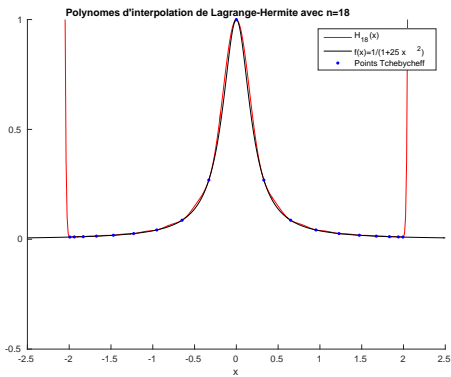
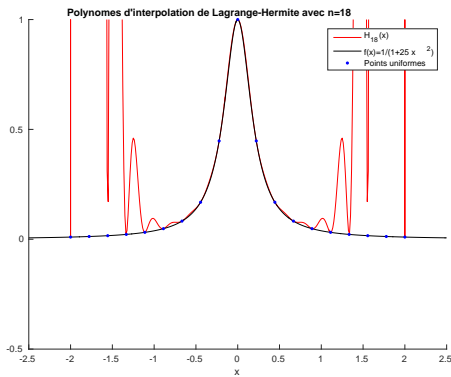


**Figure :** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 6$  (7 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev



**Figure :** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 10$  (11 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev





**Figure :** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 18$  (19 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev



### Exercice 9.1: Interpolation de Lagrange-Hermite



Ecrire une fonction algorithmique **HERMITE** permettant de calculer  $H_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) en  $t \in \mathbb{R}$ .