



## Exercice

Soient  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (1)$$

**Q. 1** *Quel est a priori le degré de  $H_n$  ?*

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (2)$$

avec, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A_i$  et  $B_i$  polynômes de degré au plus  $2n + 1$  indépendants des valeurs  $y_i$  et  $z_i$ .

**Q. 2** 1. *Déterminer des conditions suffisantes sur  $A_i$  et  $B_i$  pour que  $P_n \equiv H_n$ .*

2. En déduire les expressions de  $A_i$  et  $B_i$  en fonction de  $L_i$  et de  $L'_i(x_i)$  où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

**Q. 3** Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus  $2n + 1$  défini par (1).

### Correction Exercice

**Q. 1** On a  $2n + 2$  équations, donc à priori  $H_n$  est de degré  $2n + 1$ .

**Q. 2** 1. D'après (2) on a pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir  $P_n(x_j) = y_j$  il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3)$$

De même, on a

$$P'_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A'_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B'_i(x_j)$$

et donc pour avoir  $P'_n(x_j) = z_j$  il suffit d'avoir

$$A'_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4)$$

2. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On commence par déterminer le polynôme  $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad A'_i(x_j) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points  $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$  sont racines doubles de  $A_i$ . Le polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  admet les mêmes racines (simples) que  $A_i$  et donc  $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  admet les mêmes racines doubles que  $A_i$ . On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x) L_i^2(x) \quad \text{avec} \quad \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme  $\alpha_i$ . Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad A'_i(x_i) = 0.$$

Comme  $L_i(x_i) = 1$ , on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i) L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A'_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L'_i(x_i) L_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L'_i(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha'_i(x_i) = -2L'_i(x_i).$$

Comme  $\alpha_i$  est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x). \quad (5)$$

On détermine ensuite le polynôme  $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points  $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$  sont racines doubles de  $B_i$  et le point  $x_i$  est racine simple. Le polynôme  $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante  $C$ . Or  $L_i(x_i) = 1$  et comme  $B'_i(x_i) = 1$  on obtient

$$B'_i(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \quad (6)$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré  $2n + 1$  vérifiant (1).

**Q. 3** Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

**dém. 1:** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant (1). Le polynôme  $R = P - Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  admet alors  $n + 1$  racines doubles distinctes  $(x_0, \dots, x_n)$ . Or le seul polynôme de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  ayant  $n + 1$  racines doubles est le polynôme nul et donc  $R = 0$ , i.e.  $P = Q$ .

**dém. 2:** Soit  $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n), P'(x_0), \dots, P'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme  $H_n$  est équivalente à la bijectivité de l'application  $\Phi$ . Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension  $2n + 2$ . Elle est donc bijective si et seulement si elle est injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de  $\Phi$  il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

Soit  $P \in \ker \Phi$ . On a alors  $\Phi(P) = \mathbf{0}_{2n+2}$  et donc  $(x_0, \dots, x_n)$  sont  $n + 1$  racines doubles distinctes de  $P$ . Or le seul polynôme de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  ayant  $n + 1$  racines doubles est le polynôme nul et donc  $P = 0$ .

◇

