



Proposition

La formule de quadrature élémentaire (1) à $n + 1$ points est d'ordre k si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (\text{P-1})$$

Proof. • $\boxed{\Rightarrow}$ Si la formule (1) est d'ordre k , elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \dots, X^k$. Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que l'on a (P-1). Soit $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (1) est alors exacte.
Le polynôme Q peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \dots, X^k\}$ base de $\mathbb{R}_k[X]$:

$$Q(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j.$$

En prenant $f = Q$, la formule de quadrature (1) donne

$$\int_a^b Q(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b Q(x)dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et en utilisant (P-1) on obtient

$$\int_a^b Q(x)dx = (b-a) \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b Q(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q(x_i).$$

La formule de quadrature est donc d'ordre k .

□

