



Proposition

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux). Si, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{P-1})$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$ alors la formule de quadrature est d'ordre n au moins et l'on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (\text{P-2})$$

Proof. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$:

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx.$$

En prenant $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x)dx$$

on obtient la formule de quadrature

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \mathcal{Q}_n(f, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et donc

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i).$$

La formule de quadrature est donc d'ordre n au moins. De plus par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b-a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x)dx = (b-a) \int_0^1 L_i \circ s(t)dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b - a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_i \circ s(t) dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s(t) - s(t_j)}{s(t_i) - s(t_j)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(b-a)(t-t_j)}{(b-a)(t_i-t_j)} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dt \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de (P-1).

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, pour démontrer l'inégalité (P-2) on peut appliquer le théorème ?? pour obtenir

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b], \quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

En intégrant cette équation sur l'intervalle $[a, b]$, on aboutit à

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

et donc

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx.$$

□

4

