



## Exercice: Matrice d'élimination

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  avec  $v_1 \neq 0$ . On note  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1)$$

**Q. 1** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A_{1,1} \neq 0$ . On note  $\mathbf{A}_{:,j}$  le  $j$ ème vecteur colonne de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbf{A}_{i,:}$  son  $i$ ème vecteur ligne. On pose  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{:,1}$ .

**Q. 2** 1. Calculer  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}\mathbb{A}$  en fonction des vecteurs lignes de  $\mathbb{A}$ .

2. Montrer que la première colonne de  $\tilde{\mathbb{A}}$  est le vecteur  $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$  i.e.

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}\mathbb{A}\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (2)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$  la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \quad (3)$$

**Q. 3** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$  en fonction de l'inverse de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

Soit  $\mathbb{C}$  la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{A} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  et  $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ .

**Q. 4** Déterminer la matrice produit  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{A}_1]} \mathbb{B}$  en fonction des matrices  $\mathbb{C}_{1,1}$ ,  $\mathbb{C}_{1,2}$  et  $\tilde{\mathbb{A}}$ .

## Correction Exercice 4.1.2

**Q. 1** 1. La matrice  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$  est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (voir Proposition A.44, page 138). On a alors  $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) = 1$ .

2. Pour calculer son inverse qui existe puisque  $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) \neq 0$ , on écrit  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$  sous forme

bloc :

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right)$$

avec  $\mathbf{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$  On note  $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left( \begin{array}{c|ccc} a & & \mathbf{b}^* & \\ \hline \mathbf{c} & & \mathbb{D} & \end{array} \right)$$

avec  $a \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^{n-1}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^{n-1}$  et  $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ .

La matrice  $\mathbb{X}$  est donc solution de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$ . Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice  $\mathbb{X}$ . En effet, en utilisant les produits blocs des

matrices, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[v]} \mathbb{X} &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline \mathbf{c} & \mathbb{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \mathbf{b}^* + \mathbf{0}_{n-1}^t \times \mathbb{D} \\ \hline \mathbf{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbf{c} & \mathbf{e} \times \mathbf{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{X}$  est l'inverse de  $\mathbb{E}^{[v]}$ , on a  $\mathbb{E}^{[v]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$  et donc en écriture bloc

$$\left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_{n-1}^t, \quad a\mathbf{e} + \mathbf{c} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement  $a = 1$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{n-1}$ ,  $\mathbf{c} = -\mathbf{e}$  et  $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$ . On obtient le

résultat suivant

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right) = \mathbb{I}_n.$$

Il aurait été plus rapide d'utiliser la Proposition A.45, page 138.

**Q. 2** 1. Pour simplifier les notations, on note  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}$ . Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^n E_{i,k} A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Quand  $i = 1$ , on a par construction  $E_{1,k} = \delta_{1,k}$  et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{1,:} = \mathbf{A}_{1,:}. \quad (4)$$

Pour  $i \geq 2$ , on a  $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$  et  $E_{i,k} = \delta_{i,k}$ ,  $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . On obtient alors pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n E_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n \delta_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1} \mathbf{A}_{1,:} + \mathbf{A}_{i,:} \quad (5)$$

En conclusion, la matrice  $\tilde{\mathbb{A}}$  s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{A}_{1,:} \\ \cdots & \\ \mathbf{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\mathbf{A}_{1,:} & \\ \cdots & \\ \vdots & \\ \cdots & \\ \mathbf{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\mathbf{A}_{1,:} & \end{pmatrix}$$

2. De (4.6), on tire  $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$ . A partir de (4.7) on obtient pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$ . Par construction  $v_j = A_{j,1}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ce qui donne  $\tilde{A}_{i,1} = 0$ .

La première colonne de  $\tilde{\mathbb{A}}$  est  $(1, 0, \dots, 0)^t$ .

- Q. 3** 1. La matrice  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$  est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. Comme cette matrice est à diagonale unité (i.e. tous ses éléments diagonaux valent 1), on obtient  $\det \mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = 1$ .

Une autre manière de le démontrer. On peut voir que la matrice  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$  est bloc-diagonale. D'après la Proposition A.45, page 138, son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :  $\det \mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \det \mathbb{I}_m \times \det \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = 1$ .

2. On note  $\mathbb{X}$  l'inverse de la matrice  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ . Cette matrice s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \text{ avec } \mathbb{X}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{X}_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On a donc  $\mathbb{X}\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \mathbb{I}_{m+n}$  c'est à dire en écriture bloc

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) =$$

On doit donc résoudre les 4 équations suivantes :

$$\mathbb{X}_{1,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m, \quad \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{I}_n = \mathbb{O}, \quad \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \mathbb{I}_n.$$

Comme la matrice  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$  est inversible, on obtient

$$\mathbb{X} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}\right)^{-1} \end{array} \right)$$

Plus rapidement, comme la matrice  $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$  est bloc-diagonale, on en déduit (voir Proposition A.45, page 138) directement le résultat.

**Q. 4** Le produit  $\mathbb{B}\mathbb{C}$  peut s'effectuer par bloc car les blocs sont de dimensions compatibles et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C} &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m \mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{O}_{m,n} \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_m \mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{O}_{m,n} \mathbb{A} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} \mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{E} \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m} \mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{E} \mathbb{A} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \mathbb{A} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array} \right)\end{aligned}$$

◇

