



## Exercice

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** *Ecrire la fonction algorithmique permettant de retourner une matrice de Householder  $\mathbb{H}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  tels que  $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ . Le choix du  $\alpha$  est fait par le paramètre  $\delta$  (0 ou 1) de telle sorte que  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$  avec  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ .*

*Des fonctions comme `DOT(a,b)` (produit scalaire de deux vecteurs), `NORM(a)` (norme d'un vecteur), `ARG(z)` (argument d'un nombre complexe), `MATPROD(A,B)` (produit de deux matrices), `CTRANSPOSE(A)` (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

**Q. 2** *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction `VECRAND(n)` retournant un vecteur aléatoire de  $\mathbb{C}^n$ , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans  $]0,1[$  (loi uniforme).*

**Q. 3** *Proposer un programme permettant de vérifier que  $\delta = 1$  est le "meilleur" choix.*

**Correction Exercice** Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 1** Les données du problème sont  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\delta$ . On veut calculer  $\alpha$  et la matrice  $\mathbb{H}(\mathbf{u})$ .

---

**Algorithme 1** Calcul du  $\alpha$  et de la matrice de Householder  $\mathbb{H}(\mathbf{u})$  telle que  $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ .

---

**Données :**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  : deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  non nuls et non colinéaires.  
 $\delta$  : 0 ou 1, permet de déterminer  $\alpha$ .

**Résultat :**  $\mathbb{H}$  : matrice de Householder dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  
 $\alpha$  : nombre complexe, donné par  $-\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ .

```

1: Fonction  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$ 
2:    $\mathbf{ab} \leftarrow \text{DOT}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$   $\triangleright$   $\text{DOT}$  produit scalaire dans  $\mathbb{C}$ .
3:    $\alpha \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{a}, 2) * \exp(i * (\delta * \pi - \text{ARG}(\mathbf{ab})))$ 
4:    $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}$ 
5:    $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} / \text{NORM}(\mathbf{u}, 2)$ 
6:    $\mathbb{H} \leftarrow \text{EYE}(n) - 2 * \text{MATPROD}(\mathbf{u}, \text{CTRANSPOSE}(\mathbf{u}))$ 
7: Fin Fonction

```

---

**Q. 2** 1:  $n \leftarrow 100$   
 2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$   
 3:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$   
 4:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$   
 5:  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$   
 6:  $\text{error} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H} * \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}, 2)$

**Q. 3** 1:  $n \leftarrow 100$

```
2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$   
3:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a} + 1e - 6 * \text{VECRAND}(n)$   
4:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$   
5:  $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)$   
6:  $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$   
7:  $\text{error0} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H}_0 * \mathbf{a} - \alpha_0 * \mathbf{b}, 2) / \text{ABS}(\alpha_0)$   
8:  $\text{error1} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H}_1 * \mathbf{a} - \alpha_1 * \mathbf{b}, 2) / \text{ABS}(\alpha_1)$ 
```



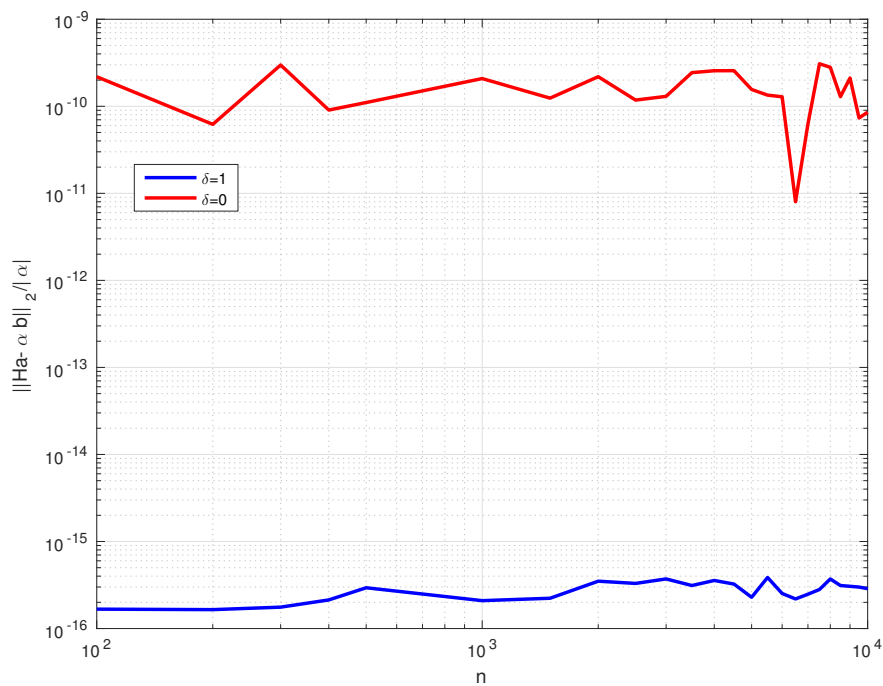


Figure 1: Choix de  $\alpha$  dans : erreur relative en norme  $L_2$