



Proposition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p + 1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (1)$$

Proof. Les hypothèses du théorème 3.5 étant vérifiées ($\Phi'(\alpha) = 0$), la suite (x_k) converge vers α . D'après un développement de Taylor de Φ en α , il existe η_k entre x_k et α vérifiant

$$\Phi(x_k) = \sum_{i=0}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \Phi^{(i)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k).$$

Comme $\alpha = \Phi(\alpha)$ et $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ on obtient

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(x_k) + \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \Phi^{(i)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k) \\ &= \alpha + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k) \end{aligned}$$

2

De plus (η_k) converge vers α car η_k est entre x_k et α et donc comme $\Phi^{(p+1)}$ est continue au voisinage de α on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^{(p+1)}(\eta_k)}{(p+1)!} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

□

