

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Supposons  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice  $\mathbb{A}$  donnée, on peut trouver des vecteurs  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  et  $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  tels qu'elle devienne une égalité.

*Proof.* On a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

or  $\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}\Delta\mathbf{x}$  et donc  $\mathbb{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$  ou encore  $\Delta\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$ . Ceci donne

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|$$

et

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{x}\|.$$

On en déduit

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|.$$

Comme  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , on a  $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  et donc, les normes étant positives,

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

D'après la Proposition 4.30, pour toute norme matricielle subordonnée il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  et un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  tel que

$$\|\mathbb{A}^{-1}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\mathbf{u}\| \text{ et } \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{v}\|.$$

En posant  $\mathbf{b} = \mathbb{A}\mathbf{v}$  et  $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{u}$  on a bien égalité. □

