



### Théorème: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit  $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$  vérifiant  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$  et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (1)$$

Soit  $x_0 \in [a, b]$  et  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . On a alors

1. la fonction  $\Phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ ,
2.  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$ ,
3. la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 au moins.
- 4.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2)$$

*Proof.* Comme  $\Phi$  est continue sur  $[a, b]$  et vérifie  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ , le théorème 3.3 (du point fixe) assure l'existence d'un point fixe. Pour l'unicité, on note  $\alpha_1 \in [a, b]$  et  $\alpha_2 \in [a, b]$ , deux points fixes de  $\Phi$ . On a donc  $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$  et  $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$ . D'après le théorème des accroissements finis il existe  $\xi \in ]\min(\alpha_1, \alpha_2), \max(\alpha_1, \alpha_2)[ \subset ]a, b[$  tel que

$$\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Phi'(\xi).$$

Comme  $|\Phi'(\xi)| < 1$ , on obtient  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ , i.e.  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Pour le second point, on a immédiatement  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in [a, b]$  car  $x_0 \in [a, b]$  et  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ . Le troisième point découle du théorème des accroissements. En effet, pour tout  $k > 0$ , il existe  $\xi_k \in ]\min(\alpha, x_{k-1}), \max(\alpha, x_{k-1}) \subset ]a, b[$  tel que

$$\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha) = (x_{k-1} - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient alors

$$|x_k - \alpha| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha|$$

et donc par récurrence

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|.$$

Comme  $L < 1$ , on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

□

