



Exercice: Matrice d'élimination

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1)$$

Q. 1 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\mathbf{A}_{:,j}$ le j ème vecteur colonne de \mathbb{A} et $\mathbf{A}_{i,:}$ son i ème vecteur ligne. On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{:,1}$.

Q. 2 1. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .

2. Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}\mathbb{A}\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (2)$$

où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \quad (3)$$

Q. 3 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ en fonction de l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

Soit \mathbb{C} la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{A} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 Déterminer la matrice produit $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{A}_1]} \mathbb{B}$ en fonction des matrices $\mathbb{C}_{1,1}$, $\mathbb{C}_{1,2}$ et $\tilde{\mathbb{A}}$.

Correction Exercice 4.1.2

Q. 1 1. La matrice $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (voir Proposition A.46, page 136). On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) = 1$.

2. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ sous forme

bloc :

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right)$$

avec $\mathbf{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^t \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|ccc} a & & \mathbf{b}^* & \\ \hline \mathbf{c} & & \mathbb{D} & \end{array} \right)$$

avec $a \in \mathbb{K}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

La matrice \mathbb{X} est donc solution de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice \mathbb{X} . En effet, en utilisant les produits blocs des

matrices, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[v]} \mathbb{X} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline \mathbf{c} & \mathbb{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \mathbf{b}^* + \mathbf{0}_{n-1}^t \times \mathbb{D} \\ \hline \mathbf{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbf{c} & \mathbf{e} \times \mathbf{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Comme \mathbb{X} est l'inverse de $\mathbb{E}^{[v]}$, on a $\mathbb{E}^{[v]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_{n-1}^t, \quad a\mathbf{e} + \mathbf{c} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{n-1}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le

résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right) = \mathbb{I}_n.$$

Il aurait été plus rapide d'utiliser la Proposition A.47, page 136.

Q. 2 1. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^n E_{i,k} A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{1,:} = \mathbf{A}_{1,:}. \quad (4)$$

Pour $i \geq 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On obtient alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n E_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n \delta_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1} \mathbf{A}_{1,:} + \mathbf{A}_{i,:} \quad (5)$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{A}_{1,:} \\ \cdots & \\ \mathbf{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\mathbf{A}_{1,:} & \\ \cdots & \\ \vdots & \\ \cdots & \\ \mathbf{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\mathbf{A}_{1,:} & \end{pmatrix}$$

2. De (4.6), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (4.7) on obtient pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.

La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \dots, 0)^t$.

- Q. 3** 1. La matrice $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. Comme cette matrice est à diagonale unité (i.e. tous ses éléments diagonaux valent 1), on obtient $\det \mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = 1$.

Une autre manière de le démontrer. On peut voir que la matrice $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ est bloc-diagonale. D'après la Proposition A.47, page 136, son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux : $\det \mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \det \mathbb{I}_m \times \det \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = 1$.

2. On note \mathbb{X} l'inverse de la matrice $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$. Cette matrice s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \text{ avec } \mathbb{X}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{X}_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On a donc $\mathbb{X}\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]} = \mathbb{I}_{m+n}$ c'est à dire en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) =$$

On doit donc résoudre les 4 équations suivantes :

$$\mathbb{X}_{1,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m, \quad \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{I}_n = \mathbb{O}, \quad \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \mathbb{I}_n.$$

Comme la matrice $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ est inversible, on obtient

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}\right)^{-1} \end{array} \right)$$

Plus rapidement, comme la matrice $\mathbb{E}^{[m, \mathbf{v}]}$ est bloc-diagonale, on en déduit (voir Proposition A.47, page 136) directement le résultat.

Q. 4 Le produit $\mathbb{B}\mathbb{C}$ peut s'effectuer par bloc car les blocs sont de dimensions compatibles et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m \mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{O}_{m,n} \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_m \mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{O}_{m,n} \mathbb{A} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} \mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{E} \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m} \mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{E} \mathbb{A} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \mathbb{A} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array} \right)\end{aligned}$$

◇

