



## Exercice: Matrice de permutation

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice identité dont on a permuté les lignes  $i$  et  $j$ .

**Q. 1** Définir proprement cette matrice et la représenter.

Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathbf{A}_{r,:}$  le  $r$ ème vecteur ligne de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbf{B}_{:,s}$  le  $s$ ème vecteur colonne de  $\mathbb{B}$ .

**Q. 2** 1. Déterminer  $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \mathbb{A}$  en fonction des vecteurs lignes de  $\mathbb{A}$ .

2. Déterminer  $\mathbb{B} \mathbb{P}_n^{[i,j]}$  en fonction des vecteurs colonnes de  $\mathbb{B}$ .

**Q. 3** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

**Correction** Exercice On note  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

**Q. 1** On peut définir cette matrice par ligne,  $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{cases} P_{r,s} &= \delta_{r,s}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ P_{i,s} &= \delta_{j,s}, \\ P_{j,s} &= \delta_{i,s}. \end{cases}$$

On peut noter que la matrice  $\mathbb{P}$  est symétrique.

**Q. 2** 1. On note  $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbf{A}$ . Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^n P_{r,k} A_{k,s}.$$



Ne pas utiliser les indices  $i$  et  $j$  qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

On obtient,  $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D_{r,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ D_{i,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{D}_{r,:} & = & \mathbf{A}_{r,:}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{D}_{i,:} & = & \mathbf{A}_{j,:}, \\ \mathbf{D}_{j,:} & = & \mathbf{A}_{i,:}. \end{array} \right.$$

2. On note  $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$ . Par définition du produit matriciel et par symétrie de  $\mathbb{P}$  on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{s,k}.$$

On obtient en raisonnant par colonne,  $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ E_{r,i} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{E}_{:,s} & = & \mathbf{A}_{:,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{E}_{:,i} & = & \mathbf{A}_{:,j}, \\ \mathbf{E}_{:,j} & = & \mathbf{A}_{:,i}. \end{array} \right.$$

**Q. 3** 1.  $\det(\mathbb{P}) = -1$ , si  $i \neq j$  et  $\det(\mathbb{P}) = 1$  sinon.

2. Immédiat par calcul direct on a  $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$  et donc la matrice  $\mathbb{P}$  est inversible et  $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$ .

◇

