



Théorème: Factorisation de Cholesky



La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice A est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

Proof. $\boxed{\implies}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $A = BB^*$ avec B est une matrice triangulaire inférieure inversible.

La matrice A est hermitienne car

$$A^* = (BB^*)^* = (B^*)^* B^* = BB^* = A.$$

Soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\langle Ax, x \rangle = \langle BB^*x, x \rangle = \langle B^*x, B^*x \rangle = \|B^*x\|^2 > 0$$

car $B^*x \neq 0$ (B^* inversible et $x \neq 0$). Donc la matrice A est bien hermitienne définie positive.



$\boxed{\impliedby}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 4.13, page 91, il existe alors une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$A = LDL^*.$$

On note $\mathbb{H}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm D_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice \mathbb{B} est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique.
Soient \mathbb{B}_1 et \mathbb{B}_2 deux factorisations positives de la matrice \mathbb{A} , on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par \mathbb{B}_2^{-1} et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \quad (1)$$

On déduit de la (voir Proposition A.37, page 136), que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs. De la (voir Proposition A.36, page 136), on obtient que le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels

strictement positifs, on en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs. Or l'équation (4.26) identifie la matrice triangulaire inférieure \mathbb{G} à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on a alors $(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$. De l'équation (4.26), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$, c'est à dire $\mathbb{G} = \mathbb{I} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$. \square

