



Théorème: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (1)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$, la suite définie en (3.1) converge vers α avec un ordre 1 pour toute donnée initiale $x^{(0)}$ dans $[a, b]$, et l'on a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (2)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

Proof. • On montre tout d'abord l'existence du point fixe. Pour cela, on note $f(x) = \Phi(x) - x$. f est donc une application continue de $[a, b]$ à valeurs réelles. On a $f(a) = \Phi(a) - a \geq 0$ et $f(b) = \Phi(b) - b \leq 0$ car $a \leq \Phi(x) \leq b$, pour tout $x \in [a, b]$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors l'existence est immédiate. Sinon (i.e. $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$), on a $f(a)f(b) < 0$ et par application directe du Théorème de Bolzano on obtient l'existence.

- On montre ensuite l'unicité sous l'hypothèse de contraction (3.3). On suppose qu'il existe α_1 et α_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. Dans ce cas on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|$$

Comme $L < 1$ on a nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.

- Pour démontrer la convergence de la suite vers α , il suffit de démontrer qu'elle est de Cauchy. En effet, si elle est de Cauchy, elle converge vers une certaine limite β et Φ étant continue on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Par unicité, du point fixe on obtient alors $\beta = \alpha$.

Il nous reste à montrer que la suite (x_k) est de Cauchy. Soit $k > 0$. On a

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|,$$

et on obtient par récurrence

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

et

$$\forall l \geq 0, |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|.$$

Soit $p > 2$. On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
 |x_{k+p} - x_k| &= |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right| \\
 &\leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}| \\
 &\leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \quad (\text{voir somme partielle d'une série géométrique}) \\
 &\leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|.
 \end{aligned}$$

Comme $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, on conclut que (x_k) est une suite de Cauchy.

On a $\forall k \geq 1$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|$$

Comme $L < 1$, on a immédiatement l'ordre 1 (au moins).

- Pour démontrer la première estimation, on note que, $\forall k \geq 1$,

$$|x_k - \alpha| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha|$$

et donc par récurrence

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|.$$

Pour la seconde, on note que, $\forall k \geq 1, \forall p \geq 1$,

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L |x_k - x_{k-1}|$$

et en faisant tendre p vers l'infini on obtient le résultat souhaité.

